数理解析 I 要綱 #11

2002–7–10　　河野

3.3　諸計算

この節では積分計算の幾つかのテクニックを紹介する。特に最初に紹介する有理関数の積分は実際的にも・理論的にも重要である。

1　有理関数の不定積分

有理関数は 2 次式または 1 次式に因数分解できれば，積分を我々の知っている関数 (初等関数) で書く事ができる。積分方法を一般的に述べるのではなく，具体例を取り上げて積分方法が分かる様に実行する事とする。$I = \int \frac{x^4+x^3-x-4}{x^3-1}dx$ を例にとる。

(1) **仮分数を帯分数へ**

最初に分子の次数が分母の次数より大きければ帯分数の形にして分子の次数を小さくする。

$$\frac{x^4+x^3-x-4}{x^3-1} = x+1-\frac{3}{x^3-1}$$

なので，$\frac{3}{x^3-1}$ の積分を求めればよい。

(2) **部分分数展開**

部分分数展開をするために分母を因数分解する。

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

となる。x^2+x+1 は実数の範囲では 1 次式に因数分解できない。

$$\frac{3}{x^3-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

を満たす定数 a, b, c を見つける。分母を払うと $3=a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)$ が恒等的に成立しているので，$a=1, b=-1, c=-2$ である。よって

$$\int\frac{3}{x^3-1}dx=\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

となる。

(3) **積分の実行**

$(x^2+x+1)'=2x+1$ なので $\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\log(x^2+x+1)$

$\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$ となるので，$\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$ が求まればよい。$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ となるので $u=x+\frac{1}{2}$ と変数変換すると $\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{1}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}u=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ となる。以上を合わせると

$$I=\frac{x^2}{2}+x-\log|x-1|+\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

(4) **少し理論的に**

任意の有理関数の不定積分が初等関数で表されるかどうかを考えてみる。

一般の有理関数を $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ とする。(1) の操作で分子の次数は分母の次数より小さいと仮定してよい。次に $g(x)$ の因数分解を実行する。アルゴリズムは存在しないが，実数の範囲で 1 次式または 2 次式に因数分解される事が知られている (代数学の基本定理)。同じ因数が 2 個以上存在する場合もあるので，部分分数を実行すると，次の形の関数の和になっている。

$$\frac{f_1(x)}{(x+a)^n}, \qquad \frac{f_2(x)}{(x^2+ax+b)^n}$$

分母が $(x^2+ax+b)^n$ の場合は変数変換で $(x^2+a^2)^n$ と仮定してよい。分子を $(x+a)$ または (x^2+a^2) で展開することにより，$\dfrac{f_1(x)}{(x+a)^n} = \dfrac{a_1}{x+a} + \cdots + \dfrac{a_n}{(x+a)^n}$, $\dfrac{f_2(x)}{(x^2+a^2)^n} = \dfrac{b_1x+c_1}{x^2+a^2} + \cdots + \dfrac{b_nx+c_n}{(x^2+a^2)^n}$ とできる。以上により次の 3 つの積分ができればよい事が分かる。

$$\int \frac{1}{(x+a)^n}dx, \qquad \int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}dx, \qquad \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$$

1 番目は $u = x+a$, 2 番目は $u = x^2+a^2$ と置けばすぐできる。3 番目の積分を直接与えるのは難しいが次の漸化式により計算することができる。

$J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$ とおくと，漸化式

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left\{\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right\}$$

が成立するので，この式により順次計算する事ができる。

演習問題 3.2　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$　(2) $\dfrac{1}{x^4+1}$　(3) $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$

(4) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$　(5) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+2}$　(6) $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$

$\boxed{2}$ 3 角関数の有理関数

$\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx$ の形の積分，ただしここで $R(s,t)$ は s と t の有理関数。

$t = \tan(x/2)$ とおくと，$dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$,$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ なので，

$$\int R(\sin x, \cos x) = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

となり有理関数の積分に帰着できる。これは万能であるが最善の方法とは限らない。例えば，$\tan x$ で表される時は $t = \tan x$ と置く方が一般に簡単になる。

$I = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ は $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ と置くと，

$$I = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

となる。

$I=\displaystyle\int(\tan x)^2dx$ の場合 $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ と置いても出来るが，計算は少し面倒である。このとき $t=\tan x$ と置くと，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{(\cos x)^2}=1+(\tan x)^2=1+t^2$ なので

$$I=\int t^2\frac{1}{1+t^2}dt=\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}=\int dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt=t-\arctan t=tanx-x$$

となる。

演習問題 3.3　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\cos x}$　(2) $\dfrac{1}{1+\sin x}$　(3) $\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$

(4) $\dfrac{1}{\tan x}$　(5) $\dfrac{1}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$

$\boxed{3}$ 1 次分数式の無理関数

$\displaystyle\int R\left(x,\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ の形の積分，ただしここで $R(s,t)$ は s と t の有理関数。

$t=\sqrt[k]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ と置くと，$x=\dfrac{b-dt^k}{ct^k-a}$, $dx=\dfrac{(ad-bc)kt^{k-1}}{(ct^k-a)^2}dt$ より

$$\int R\left(x,\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{b-dt^k}{ct^k-a},t\right)\frac{(ad-bc)kt^{k-1}}{(ct^k-a)^2}dt$$

演習問題 3.4　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$　(2) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x-1}}$　(3) $\dfrac{x}{(x-a)\sqrt{x+b}}$

$\boxed{4}$ ルートの中の 2 次式 (1)

$\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ の形の積分，ただし，ここで $R(s,t)$ は s と t の有理関数。2 通りの方法で計算をする。最初は 3 角関数を用いて変換するものを紹介し，次に無理式を用いるものを紹介する。3 角関数を用いる変換の場合 2 次式はあらかじめ $a^2-x^2, x^2+a^2, x^2-a^2$ のいずれかの形に変形されているものとする。

(1) $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$

$x=a\sin t$ と置くと，

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\int R\left(a\sin t,a\cos t\right)a\cos tdt$$

(2) $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx$

$x=a\tan t$ と置くと，

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx=\int R\left(a\tan t,\frac{a}{\cos t}\right)\frac{a}{\cos^2 t}dt$$

(3) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$

$x = \dfrac{a}{\sin t}$ と置くと，

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx = -\int R\left(\frac{a}{\sin t}, \frac{a\cos t}{\sin t}\right) \frac{a\cos t}{\sin^2 t}\, dt$$

いずれの場合も 3 角関数の有理関数に帰着できる。

$\boxed{5}$ ルートの中の 2 次式 (2)

無理式を用いてルートの中に 2 次式がある場合の積分 $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ を求める。

(1) $a > 0$ の場合

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ と置くと，$x = \dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$, $dx = \dfrac{2\sqrt{a}t^2+2bt+2\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$, $t-\sqrt{a}x = \dfrac{\sqrt{a}t^2+bt+c}{2\sqrt{a}t+b}$ となるので

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c}{2\sqrt{a}t+b}\right) \frac{2\sqrt{a}t^2+2bt+2\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$$

(2) $ax^2+bx+c = 0$ が 2 解 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ を持つ時。$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ となる。$t = \sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$ または同じことだが $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$ と置くと，$x = \dfrac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2-a}$, $x-\alpha = \dfrac{a(\beta-\alpha)}{t^2-a}$, $dx = \dfrac{2a(\beta-\alpha)}{(t^2-a)^2}dt$ より，

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R\left(\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}, \frac{a(\beta-\alpha)t}{t^2-a}\right) \frac{2a(\beta-\alpha)}{(t^2-a)^2}dt$$

を得る。

方法の違いで結果が一見違うように見える時もある。例えば，$I = \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ を考える。3 角関数で置換すると，

$$I = I_1 = -\sin^{-1}\frac{1}{x}$$

となるが，無理式を用いると，

$$I = I_2 = 2\tan^{-1}(x+\sqrt{x^2-1})$$

となる。見かけは違うが，実は $I_2 = \pi + I_1$ となっている。

演習問題 3.5　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$　(3) $\sqrt{x^2+a}$

(4) $\sqrt{a^2-x^2}$　(5) $x^2\sqrt{a^2-x^2}$

−−−おまけ−−−

$\boxed{6}$ 指数関数の有理関数　: $t = e^x$ と置くと $\int R(e^x)dx = \int R(t)\frac{1}{t}dt.$

$\boxed{7}$ $\int \frac{R(x^2)}{\sqrt{a+bx^2}}dx$
$u = \frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}$ と置くと，
$\int \frac{R(x^2)}{\sqrt{a+bx^2}}dx = \int R\left(\frac{au^2}{1-bu^2}\right)\frac{1}{1-bu^2}du$

$\boxed{8}$ 双曲線関数を用いる：$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ を hyperbolic cosine, hyperbolic sine と呼ぶ。これを使うとルートの中の 2 次式の場合) を次の様に出来る。
$x = a\sinh t$ と置くと，

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) = \int R\left(a\sinh t, a\cosh t\right) a\cosh t dt$$

$x = a\cosh t$ と置くと，

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) = \int R\left(a\cosh t, a\sinh t\right) a\sinh t dt$$

いずれの場合も指数関数の有理関数に帰着できる。

$\boxed{9}$ $I = \int x^m(a+bx^n)^{q/p}dx \qquad (p, q \in \boldsymbol{Z}, m, n \in \boldsymbol{Q})$

(1) $m, n \in \boldsymbol{Z}$ の場合に帰着できる。$m = \frac{m_1}{m_2}, n = \frac{n_1}{n_2}$ で r を m_2, n_2 の最小公倍数とする。
$t = x^{1/r}$ と置くと，$x = t^r, dx = rt^{r-1}dt$ より，
$I = r\int t^{mr+r-1}(a+bt^{nr})^{q/p}dt$ となる。

(2) $\frac{m+1}{n} \in \boldsymbol{Z}$ の時

$t = (a+bx^n)^{1/p}$ と置くと，$x = \left(\frac{t^p-a}{b}\right)^{1/n}$, $pt^{p-1}dt = bnx^{n-1}dx$ より，

$I = \int \left(\frac{t^p-a}{b}\right)^{(m+1)/n-1} t^{p+q-1}dt$ 　　　6) のタイプになる。

(3) $\frac{m+1}{n} + \frac{q}{p} \in \boldsymbol{Z}$ の時

$t = (ax^{-n}+b)^{1/p}$ と置くと，$x = \left(\frac{a}{t^p-b}\right)^{1/n}$, $pt^{p-1}dt = -nax^{-n-1}dx$ より，

$I = -\frac{p}{na}\int \left(\frac{a}{t^p-b}\right)^{(m+1)/n+q/p+1} t^{q+p-1}dt$ 　　　6) のタイプになる。

$\boxed{10}$ 楕円積分　$R(x, y)$ を x, y の有理関数とする。この時
$R\left(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)$, $R\left(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right)$ などの積分は適当な変数変換を行

うと（擬楕円積分を除き），標準形

$$\int R\left(x, \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\right)dx \qquad (0<k<1)$$ の形にできる。これは更に次の３種類の積分に帰着できる。

(1) 第１種楕円積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx$

(2) 第２種楕円積分 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}dx$

(3) 第３種楕円積分 $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx$

これらは初等関数では表されないことが知られている。

擬楕円積分の例をあげておく。$I = \dfrac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$

これは $t = x + \dfrac{1}{x}$ と置くと $I = \dfrac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x}$ となる。