

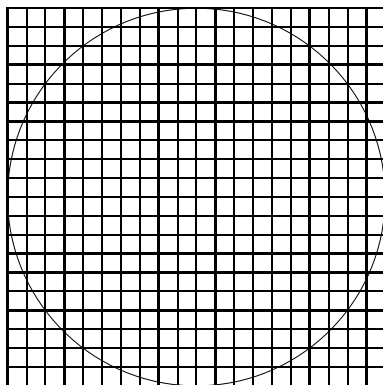
今回の講義から数理解析 II に入る。要綱の number は 1 から始めるが、セクション・ページ数は前期からの継続とする<sup>(1)</sup>。

## 4 1 変数関数の定積分

不定積分の所でもふれたが、定積分は定義だけから見ると不定積分とは無関係である。定義としては無関係の両者の間に関係が成立する事 (微積分の基本定理) が積分の理論的把握のキーポイントである。この事については定義の後にもう一度ふれる。

### 4.1 定義と性質

長方形や3角形など多角形以外の「不規則」な形をした図形の面積を求める努力は古くからされていた。古代ギリシャのアルキメデスは放物線と直線に囲まれた部分の面積を求めている。定積分はその流れをくんだもといえる。簡単のために円の面積を求める事を考える。勿論円の面積の公式は知らないものとする。



図の円は半径 1 とする。長さが  $\frac{1}{10}$  のメッシュを考える。円にすっぽり含まれている正方形を数えると 277 個ある。一部含まれている正方形は 73 個ある。一部含まれている正方形を平均して半分含まれていると考える。1 個の小正方形の面積は  $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$  なので、面積はおおよそ

$$277 \times \frac{1}{100} + 73 \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{2} = 3.115$$

と考えられる。得られた答えは (正しい値を知っている立場から見れば) 小数点以下 1 桁まで正しく求まっている。正しい値を知らない場合はどうであろう。円の面積は 277 個の小正方形全体の面

<sup>(1)</sup>この要綱は数理解析 I と同様に <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/> に置いておく。前期アクセスできなかったとの情報が何人かから寄せられている。net の状況・DNS の状況等により一時的にアクセスできない場合が生じる可能性もあるが、時間・設定等を変える事によりアクセス可能と考えられる。

積よりは大きいし、半分入っている正方形も1個と数えた  $277 + 73 = 350$  個の小正方形全体の面積よりは小さい。よって

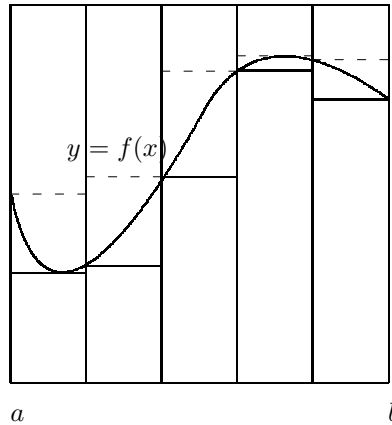
$$2.77 < \text{円の面積} < 3.5$$

が分かる。メッシュを細かくすれば精度は上がっていく。定積分もこれとほぼ同様の考えから出発している。

関数  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) を考える。今  $f(x) > 0$  を仮定しておこう。この関数のグラフと  $x$  軸、直線  $x = a$  及び直線  $x = b$  で囲まれた部分の面積  $S$  を求める事を考える。次の図の様に縦に短冊形に分割する。関数のグラフより下にある短冊部分(図では実線部の短冊)の面積の和を  $S_{\text{下}}$  とする。関数のグラフをすっぽり含む短冊部分(図では破線部と実線部の短冊)の面積の和を  $S_{\text{上}}$  とする。このとき

$$S_{\text{下}} \leq S \leq S_{\text{上}}$$

が得られる。ここで分割を細かくして行き、その極限を考える。 $S_{\text{下}}$  の極限と  $S_{\text{上}}$  の極限が一致すれば、それは  $S$  と一致するので  $S$  が求まる。



今述べたことをきちんと書けば定積分の定義になる。

**定義 4.1**  $y = f(x)$  を区間  $[a, b]$  で定義された**有界な関数**とする。ここで有界な関数とはある実数  $M$  が存在して、任意の  $x$  に対し  $|f(x)| \leq M$  となるものをいう。即ち関数の値がいくらでも大きくなったり、小さくなったりしない関数である。

区間  $[a, b]$  の**分割  $\Delta$**  とは数の集合で、 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  と書いたとき、1)  $x_0 = a, x_n = b$   
2)  $x_{i-1} < x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を満たすものをいう。各小区間  $[x_{i-1}, x_i]$  に対し、この小区間における関数  $f$  の上限を  $M_i$ 、下限を  $m_i$  とおく。 $f$  が連続関数の場合はこれは最大値・最小値にあたる。分割  $\Delta$  に対し  $s(\Delta) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ 、 $S(\Delta) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$  とおく(以前の  $S_{\text{下}}, S_{\text{上}}$  に対応するもの)。分割  $\Delta$  の最大幅を  $\|\Delta\|$  とする。即ち

$$\|\Delta\| = \max \{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \dots, n\}$$

とおく。 $\|\Delta\| \rightarrow 0$  は分割が一様に細くなる事を意味する。分割を一様に細かくしていったとき、 $s(\Delta)$  の極限值と  $S(\Delta)$  の極限值が一致するとき、即ち

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} s(\Delta) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(\Delta)$$

となるとき、 $f$  は  $[a, b]$  で (定) 積分可能 (integrable) であるという。この極限値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書く。

テキストの定義は定義 4.1 とは異なっているのでそれも紹介しておこう。2 つの定義は同値である事が分かる (命題 4.3)。

**定義 4.2**  $f$  を区間  $[a, b]$  で定義された有界な関数とする。分割等は定義 4.1 と同じとする。

各小区間  $[x_{i-1}, x_i]$  に対し、この小区間から任意に点  $\xi_i$  を選んでおく。

分割  $\Delta$  に対し  $\Sigma(\Delta; \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$  とおく。

分割を一様に細かくしていったとき、 $\Sigma(\Delta; \xi_i)$  が  $\xi_i$  の選び方によらず同じ極限値に収束するとき  $f$  は  $[a, b]$  で (定) 積分可能 (integrable) であるという。この極限値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書く。

**命題 4.3**  $[a, b]$  で定義された関数  $f$  が定義 4.1 の意味で積分可能なら定義 4.2 の意味でも積分可能である。逆も成立する。積分可能のときそれぞれの極限値 ( $\int_a^b f(x)dx$  と書かれたもの) は等しい。

**略証**

$$s(\Delta) \leq \Sigma(\Delta, \xi_i) \leq S(\Delta)$$

が成立するので 1 から 2 は OK。2 から 1 は少し細工が必要。 $\Sigma(\Delta; \xi_i)$  が  $s(\Delta)$  に十分近くなるように、 $\xi_i$  を取れる事を示す。同様に  $\Sigma(\Delta; \xi_i)$  が  $S(\Delta)$  に十分近くなるように  $\xi_i$  が取れる事を示す。結局任意の正数  $\varepsilon$  に対し  $\xi_i, \xi'_i$  を適当に取ると

$$\Sigma(\Delta; \xi_i) - \varepsilon \leq s(\Delta) \leq S(\Delta) \leq \Sigma(\Delta; \xi'_i) + \varepsilon$$

が成立する。ここで極限をとる。定義 4.2 の極限値を  $\alpha$  と置くと

$$\alpha - \varepsilon \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} s(\Delta) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(\Delta) \leq \alpha + \varepsilon$$

が得られる。 $\varepsilon$  は任意だったので、

$$\alpha \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} s(\Delta) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(\Delta) \leq \alpha$$

が分かり定義 4.1 の意味でも、同じ極限値に収束する事が分かる。詳しくは参考文献<sup>(2)</sup>を見て下さい。■

定義 4.2 を見ると積分記号を現在の様を書くか分かるかもしれない。

$$\Sigma(\Delta; \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \longmapsto \int_a^b f(x)dx$$

<sup>(2)</sup>高木貞治『解析概論』岩波、小平邦彦『解析入門』岩波、その他

例を計算しよう。  $y = f(x) = x^2$  とし、定義域は  $[0, 1]$  とする。  $\int_0^1 f(x) dx$  を求めてみよう。

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

という計算法はまだ使う事ができない。定義から分かるように積分は定義では微分とは何ら関係がないからである。定義 4.1 に基づいて計算しよう。

分割は等分割としよう、即ち  $\Delta_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right\}$  とする。  $y = f(x) = x^2$  は単調増加なので、小区間  $\left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$  において最小値は  $m_i = f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ 、最大値は  $M_i = f\left(\frac{i}{n}\right)$  である。よって

$$S_n = S(\Delta_n) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

となり、  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$  となるので  $S_n \rightarrow \frac{1}{3}$  となる。また

$$s_n = s(\Delta_n) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

となり、  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$  となるので  $s_n \rightarrow \frac{1}{3}$  となる。両極限は一致するので  $y = f(x) = x^2$  は  $[0, 1]$  で積分可能であり

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

となる。(高校時代にすでに学んでいる) 不定積分を使う方法に比べると、複雑であるし、求める関数ごとにそれに対応した和公式 (今の場合  $\sum_{i=1}^n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ ) が必要になる。しかし微積分学成立以前の求積方はこの様であった。

もう一つ例を考えよう。区間は  $[0, 1]$  で関数は次の様なものとする:  $y = f(x)$  は  $x$  が有理数なら  $f(x) = 0$ 、無理数なら  $f(x) = 1$  とする。任意の分割  $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  を考える。任意の小区間  $[x_{i-1}, x_i]$  において最小値は  $m_i = 0$ 、最大値は  $M_i = 1$  である。よって  $s(\Delta) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n 0 = 0$ 、  $S(\Delta) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1$  である。2つの極限値は一致しないので、この関数は積分可能でない。

積分可能な関数として次のものが知られている。テキストの捕捉 §1.6 I に証明が書いてある。講義では証明は省略する。

**定理 4.4** 連続関数は有界閉区間で積分可能である。

単調関数は有界閉区間で積分可能である。