

積分の基本的な性質を確認しながら、微積分の基本定理の証明を目指そう。積分では次の性質が基本的である。

- (1) [線型性] f, g が積分可能であるときその和・実数倍である関数も積分可能で次が成り立つ。

$$1) \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$2) \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

- (2) [区間線型性] 関数 f が区間 $[a, c], [c, b]$ で積分可能ならば、区間 $[a, b]$ でも積分可能であり、次が成立する。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- (3) [単調性] 関数 f, g が区間 $[a, b]$ で積分可能とする。任意の $x \in [a, b]$ に対し $f(x) \leq g(x)$ となるとき次が成立する。

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

- (4) [単位の値] 値が 1 である定数関数 τ は任意の閉区間 $[a, b]$ で積分可能であり、次が成立する。

$$\int_a^b \tau(x)dx = b - a^{(3)}$$

いくつか注意をしておこう。「基本的」という意味はこの 4 つの性質から積分が一意的に定まる事を意味する。即ち、関数 f と区間 $[a, b]$ に対し実数を対応される対応 $J(f, [a, b])$ がこの 4 つの性質を持つとき、この J は定義 4.1 で定義した積分と一致する。

関数 f, g が積分可能であるとき、その積 fg も積分可能である。しかしその積を求める「積の積分法」⁽⁴⁾なるものは存在しない。これも積分の計算を複雑にしている 1 つの原因である。

$\int_a^b f(x)dx$ において a を下端、 b を上端というのが $b \leq a$ の場合にも積分を拡張しておく。
 $a = b$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

$b < a$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

と定義する。拡張した意味の積分に対して前述の基本性質の (1),(2),(4) は成立する。(3) は成立しない ($b \leq a$ のときは不等号が逆になる)。

(3) 通常 $\int_a^b 1dx$ と書く。また 1 を略して $\int_a^b dx$ と書く事もある。

(4) 毎年のテストでは、存在しないはずの「積の積分法」を用いて計算するものがある程度存在する。

関数の**平均値**というものを定義しよう。有限個の量の平均はそれらを足してその個数で割る事で得られる。関数の平均値はその極限と考えられる。区間 $[a, b]$ で定義された (積分可能な) 関数 f を考える。区間を n 等分して $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ とする。ここで定義 4.2 の Riemann 和で $\xi_i = x_i$ とおくと、

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{b-a}{n} = (b-a) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

となる。両辺を $b-a$ で割って極限をとると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

が得られる。この値を平均値という。

連続の場合平均値はある点の関数値で与えられる。

定理 4.5 [積分の平均値の定理] 関数 f は $[a, b]$ で連続とする。このときある c ($a < c < b$) が存在して

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

が成立する。

証明 関数 f の最大値を M , 最小値を L とする。 $L \leq f(x) \leq M$ より

$$\int_a^b L dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

が分かる。3 辺を $b-a$ で割ると

$$L \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

が得られる。中間値の定理からある c ($a < c < b$) が存在して $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$ が成立する。■

c を $c = a + \theta(b-a)$ という形に書いておくと、 $b > a$ の場合にも平均値の定理が成立する。そのとき勿論区間は $[b, a]$ であるが。

[積分の平均値の定理] 連続な関数 f と a, b に対し θ ($0 < \theta < 1$) が存在して

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(a + \theta(b-a))$$

が成立する。