数理解析 II 要綱 #3 　　2002–10–29 　　河野

4.2 微積分の基本定理

命題 4.6 関数 f は $[a,b]$ で連続とする。$F(x) = \int_a^x f(x)dx$ [5] とおくと $F'(x) = f(x)$ が成立する。

証明 $F(x+h)-F(x) = \int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_a^{x+h} f(x)dx + \int_x^a f(x)dx = \int_x^{x+h} f(x)dx$ より，積分の平均値の定理を用いると，ある c が存在して $F(x+h)-F(x) = f(c)h$ と書ける。ここで h は x と $x+h$ の間の実数。$F(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$ を得る。

定理 4.7 [**微積分の基本定理**] 関数 f は $[a,b]$ で連続とする。$G(x)$ を f の原始関数とすると

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

が成立する。

証明 $G(x)$ は f の原始関数なので $G'(x) = f(x)$。命題 4.6 より $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ も $F'(x) = f(x)$ を満たす。$H(x) = F(x) - G(x)$ とおくと，$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$，よって $H(x)$ は定数である。これを C とおくと，$F(x) = G(x) + C$ である。これに $x = a$ を代入すると，$F(a) = 0$ なので，$0 = G(a) + C$，よって $C = -G(a)$。$F(x) = G(x) - G(b)$ に $x = b$ を代入すると求める式が得られる。 ∎

$G(b) - G(a)$ を $\Big[G(x)\Big]_a^b$ とも書く。

この定理により，**連続な関数**の積分計算において不定積分を用いた計算が可能になる。ここで連続というのは重要な制限であって，連続でない関数に適用してはいけない。例えば次の計算は間違いである[6]。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx = \Big[\log|x|\Big]_{-1}^1 = \log|1| - \log|-1| = \log 1 - \log 1 = 0$$

被積分関数が連続のとき不定積分の所で扱った定理を適用できる。特に積分に関して部分積分法，置換積分法を使用できる。

定理 4.8 [**部分積分法**] f, g が C^1 級のとき次が成立する。

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

[5] テキストではこの形のものを不定積分と呼び，原始関数と区別している。この講義では特に区別しない事にする。
[6] テストでこの様な計算をするものがある程度いる。

定理 4.9 [**置換積分法**] f は連続, $x=\varphi(t)$ は C^1 級とする。$a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ とすると次が成立する。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

例 4.10 **部分積分法**： $I=\displaystyle\int_0^1 x\arctan x dx$ を計算する。$(\arctan x)' = \dfrac{1}{a+x^2}$ かつ $\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)' = x$ なので,

$$I = \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \arctan x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \arctan x\right]_0^2 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right)\frac{1}{1+x^2}dx$$

を得る。ここで

$$J=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \Big[\ x\ \Big]_0^1 - \Big[\arctan x\Big]_0^1 = 1-\frac{\pi}{4}$$

なので $I=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$ である。

置換積分法： $I=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ を計算する。$x=\sin t$ とおくと，$x:0\to 1$ のとき $t:0\to\dfrac{\pi}{2}$ である。$x'=\cos t$ なので

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2t + 1)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

を得る。