数理解析 II 要綱 #4

2002–11–5 河野

4.3 広義積分

積分の定義においては関数は有界であり，積分区間も有界な閉区間であった。ここではその制限をはずせる場合にはずし，積分の意味を拡張する。これらは**広義積分**と呼ばれる。

例から始めよう。関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ を $x > 0$ の部分で考える。今 1 から M まで f を積分したものを $I(M)$ とすると，

$$I(M) = \int_1^M \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^M = 1 - \frac{1}{M}$$

となる。ここで $\displaystyle\lim_{M\to\infty} I(M) = 1$ となるので，$\displaystyle\int_0^\infty f(x) = 1$ と書く事が許されるだろう。

関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ を $x > 0$ の部分で考える。今 ε から 1 まで f を積分したものを $J(\varepsilon)$ とすると，

$$J(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \Big[2\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

となる。ここで $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} J(\varepsilon) = 2$ となるので，$\displaystyle\int_0^1 f(x) = 2$ と書く事が許されるだろう。

以上の例から次を定義する。幾つかの type がある。最後に一般的な形を扱う。

(1) 関数 f は $(a, b]$ で連続とする。$I(\varepsilon) = \displaystyle\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ とおく。$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} I(\varepsilon)$ が収束するとき

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は収束する」という。

(2) 関数 f は $[a, b)$ で連続とする。$I(\varepsilon) = \displaystyle\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ とおく。$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} I(\varepsilon)$ が収束するとき

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は収束する」という。

(3) 関数 f は $[a, \infty)$ で連続とする。$I(M) = \displaystyle\int_a^M f(x)dx$ とおく。$\displaystyle\lim_{M\to\infty} I(M)$ が収束するとき

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ は収束する」という。

(4) 関数 f は $(-\infty, b]$ で連続とする。$I(N) = \int_N^\infty f(x)dx$ とおく。$\lim_{N\to-\infty} I(M)$ が収束するとき

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{N\to-\infty}\int_N^b f(x)dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ は収束する」という。

(5) 関数 f は有限個の点 $a_1, \ldots, a_n$ を除いて (A, B) で連続とする。ただし $A = \infty$, $B = \infty$ の場合も含むとする。$n+1$ 個の点 $c_0, c_1, \ldots, c_n$ を $c_0 < a_1 < c_1 < a_2 < \cdots < a_n < c_n$ となる様にとる。次のすべての広義積分が収束するとき，広義積分 $\int_A^B f(x)dx$ は収束するという。

$$\int_A^{c_0} f(x)dx, \int_{c_{i-1}}^{a_i} f(x)dx \int_{a_i}^{c_i} f(x)dx, \int_{c_n}^B f(x)dx$$

広義積分の値はこれらのすべての和で定義する。即ち

$$\int_A^B f(x)dx = \int_A^{c_0} f(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{a_i} f(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{c_i} f(x)dx + \int_{c_n}^B f(x)dx$$

で定義する。

例 4.11

(1) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$: この広義積分は (5) のタイプである。分点 c_0 として 0 を選ぶ。$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$, $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx$ が共に収束していれば値が求まる。$I(M) = \int_0^M \frac{1}{1+x^2}dx$ する。$x = \tan t$ とおき置換積分を行う。$0 = \arctan 0$ である。また $M' = \arctan M$ とおくと，$dx = (1+x^2)dt$ なので，$I(M) = \int_0^{M'} \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)dt = \int_0^{M'} dt = M'$

$M \to \infty$ のとき，$M' \to \frac{\pi}{2}$ となるので，

$$\lim_{M\to\infty} I(M) = \lim_{M'\to\frac{\pi}{2}} M' = \frac{\pi}{2}$$

$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx$ も同様に計算できて $\frac{\pi}{2}$ となる。

(2) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi$: (1) は積分区間を見ると，広義積分である事が分かったが，この場合は被積分関数を見る必要がある。この関数は区間の両端で無限大となるので,(5) のタイプの広義積分になっている。分点を 0 とする。$x = \sin t$ と変数変換を行う。$0 = \arcsin 0$ である。$u = \arcsin(1-\varepsilon)$ とおく。$\varepsilon \to +0$ のとき $u \to \frac{\pi}{2}$ である。$I(\varepsilon) = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ とおくと，$I(\varepsilon) = \int_0^u \frac{1}{\cos t}\cos t dt = u$ なので $\lim_{\varepsilon\to+0} I(\varepsilon) = \lim_{u\to\frac{\pi}{2}} u = \frac{\pi}{2}$