数理解析 II 要綱 #5

2002–11–19　　河野

4.4 計量と長さ

3 つの物理量 X, Y, Z の間に $Z = Y \times X$ の関係があるとき，量 Z は一般に積分を用いて求める事ができる。

例えば (距離)=(速さ)×(時間) という関係がある。速さ v が時間 t の関数であるとする。この v を $v(t)$ と書く。時間 t_0 から時間 t_1 の間に動いた距離 ℓ は

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

で与えられる。

今量 Y が量 X の関数とする。X のパラメーターを x とし，$Y = Y(x)$ と書く。量 X が x_0 から x_1 まで変化したときの量 Z は

$$Z = \int_{x_0}^{x_1} Y(x)dx$$

で与えられる。

「(面積)=(縦)×(横)」なので，$R = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, 0 \leqq y \leqq f(x) \right\}$ の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

で与えられる。

「(体積)=(縦)×(横)×(高さ)」である。空間内の領域が R を考える。平面 $x = u$ と R の共通部分の面積を $m(u)$ とする。即ちここでは「(体積)=(面積)×(高さ)」と見ている。$x < a$ または $x > b$ のとき $m(x) = 0$ とする。R の体積 V は

$$V = \int_a^b m(x)dx$$

で与えられる。

密度が一様でない銅線を考える。「(質量)=(線密度)×(長さ)」なので長さ ℓ の銅線を考える点 x における線密度を $\mu(x)$ とするときこの銅線の質量 M は

$$M = \int_0^{\ell} \mu(x)dx$$

で与えられる。

ちょっと先走り：3 次元の物体 D を考える。D の点 $P = (x_1, x_2, x_3)$ における密度を $\mu(x_1, x_2, x_3)$ とする。「(質量)=(密度)×(体積)」が成立している。この物体の質量 M は

$$M = \iiint_D \mu(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3$$

で与えられる。

次に曲線の長さを求める事を考える。平面上の曲線 C がパラメータ t により $x = x(t), y = y(t)$, $(a \leqq t \leqq b)$ と表されているとする。$[a, b]$ の分割 Δ を考える。

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

$P_i = ((x(t_i), y(t_i))$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ とし折れ線 $P_0P_1 \cdots P_n$ で曲線 C を近似する。折れ線の長さは

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(x(t_i) - x(t_{i-1})\right)^2 + \left(y(t_i) - y(t_{i-1})\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(c_i)^2 + y'(d_i)^2}(t_i - t_{i-1})$$

となる。ただし c_i, d_i は $t_{i-1} \leqq c_i, d_i \leqq t_i$ となる実数である。ここで分割を細かくしていった極限を考えると，極限では

$$(\text{曲線 } C \text{ の長さ}) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

となる。

5　多変数関数の積分

積分を多変数に拡張しよう。拡張されるのは不定積分ではなく，定積分である。「積分 = 定積分」であり，不定積分はその計算法であるという事実が，多変数になると 1 変数の場合よりも明確になる。「多変数」という表題であるが，微分法のときと同様に主要には 2 変数関数の場合を扱う。3 変数関数にも少しふれるが，一般の n 変数関数の場合は扱わない。興味あるものは以前あげたテキストを参考にして欲しい。

5.1　定義と諸性質

定義の前に 1 変数関数の場合を振り返る。1 変数の場合積分とは関数と区間に対しある実数を対応させる写像と考える事ができた：即ち関数 f と区間 $[a, b]$ に対し実数 $J(f\,; [a, b])$ が存在して次の 4 つの性質を持つ。

(1) [**線型性**]

　1) $J(f + g\,; [a, b]) = J(f\,; [a, b]) + J(g\,; [a, b])$

　2) $J(\alpha f\,; [a, b]) = \alpha J(f\,; [a, b])$

(2) [**区間線型性**]

$$J(f\,; [a, b]) = J(f\,; [a, c]) + J(f\,; [c, b])$$

(3) [**単調性**] 任意の $x \in [a, b]$ に対し $f(x) \leqq g(x)$ となるとき

$$J(f\,; [a, b]) \leqq J(g\,; [a, b])$$

(4) [**単位の値**] 値が 1 である定数関数 τ に対し

$$J(\tau\,; [a, b]) = b - a$$

具体的構成は，分割 $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ に対し $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ としたとき，$\|\Delta\|$ を 0 に近づけたときの極限として定義された。

そこで 2 変数関数の積分としては次の様なものを考えたい。2 変数関数 f と $\boldsymbol{R}^2$ のある領域 D に対し，実数 $J(f\,;D)$ を対応させる写像で次の 4 つの性質を持つ。

(1) [**線型性**]

1) $J(f+g\,;D) = J(f\,;D) + J(g\,;D)$
2) $J(\alpha f\,;D) = \alpha J(f\,;D)$

(2) [**領域線型性**] 領域 D_1, D_2 に対し $m(D_1 \cap D_2) = 0$ のとき和集合 $C_1 \cup D_2$ を $D_1 + D_2$ と書く。ただし $m(X)$ は領域 X の面積とする。

$$J(f\,;D_1 + D_2) = J(f\,;D_1) + J(f\,;D_2)$$

(3) [**単調性**] 任意の $(x, y) \in D$ に対し $f(x, y) \leqq g(x, y)$ となるとき

$$J(f\,;D) \leqq J(g\,;D)$$

(4) [**単位の値**] 値が 1 である定数関数 τ に対し

$$J(\tau\,;D) = m(D)$$

この様な積分 J を定義するため 1 変数の場合と同様に分割を用いて定義する。ただし 2 変数になると領域の形が問題になるので定義は 2 段階で行う。最初は領域が長方形の場合，次に一般の場合を扱う。

定義域が長方形領域の場合： $R = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \right\}$ とする。R で有界な 2 変数関数 $f(x, y)$ を考える。R の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\,; y_0, y_1 \ldots, y_m\}$ とは

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

となるものとする。i, j $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m)$ に対し小長方形領域 Δ_{ij} とは $\left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \right\}$ となるものとする。Δ_{ij} における上界，下界をそれぞれ M_{ij}, m_{ij} とする。つまり

$$M_{ij} = \sup\{\, f(x, y) \mid (x, y) \in \Delta_{ij} \,\} \qquad m_{ij} = \inf\{\, f(x, y) \mid (x, y) \in \Delta_{ij} \,\}$$

とする。

$S(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$, $s(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ とおく。
分割の最大幅 $\|\Delta\|$ を $\|\Delta\| = \max\{\, x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1} \mid i = 1, \ldots, n\,, j = 1, \ldots, m \,\}$ で定義する。
$\|\Delta\| \to 0$ とするとき，$S(\Delta)$, $s(\Delta)$ が同じ極限値に収束するとき，f は R で**積分可能** (*integrable*) であるといい，極限値を

$$\iint_R f(x, y)\,dxdy$$

で表す。

定義域が一般の場合：D を $\boldsymbol{R}^2$ の有界閉領域とする。f を D で定義された有界な関数とする。D を含む長方形領域 R を 1 つ固定する。このとき $f_R(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$ と定義する。f_R が R で積分可能のとき，f は D で積分可能であるといい，

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_R f_R(x,y)dxdy$$

で定義する。

ここで 2 つ注意をしておく。1 つ目はこの定義が矛盾なく定義されているかという点である。R と異なる長方形領域 R' をとったとき，$\displaystyle\iint_R f_R(x,y)dxdy$ が存在するのに $\displaystyle\iint_{R'} f_{R'}(x,y)dxdy$ が存在しなかったりすると，積分可能という概念は確定しない。また $\displaystyle\iint_R f_R(x,y)dxdy$ と $\displaystyle\iint_{R'} f_{R'}(x,y)dxdy$ の値が異なると積分値が確定しない。

2 つ目は積分可能性の問題である。D の形は色々なものが考えられるので，定数関数 τ に対しても $\displaystyle\iint_D \tau(x,y)dxdy$ が存在しないものがある。我々はその様な領域は考えないことにする。積分領域 D といったら，D 上で定数関数は積分可能になる事を仮定する。(この様な領域を面積確定と呼ぶ。) 有限個の滑らかな曲線で囲まれた図形は面積確定であるので，その様なものに限ることにする。この仮定の元で次の定理が成り立つ。

定理 5.1 f が D で連続のとき f は D で積分可能である。

1 変数のときと同じ様に Reimann 和を用いても定義できる。つまり小領域 Δ_{ij} から点 (ξ_i, η_j) を任意に選んで来る。このとき

$$\Sigma(\Delta; \xi_i, \eta_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

とおく。分割を細かくしていったとき，ξ_i, η_j の選び方によらず同じ極限値に収束するとき，積分可能と定義すると前の定義と同値であることが分かる。