数理解析 II 要綱 #6

2002–11–26　河野

定理 5.2 2 重積分は次の性質を持つ。ただし積分領域は面積確定，被積分関数は積分可能を仮定する。

(1) [**線型性**]

1) $\displaystyle\iint_D (f+g)dxdy = \iint_D fdxdy + \iint_D gdxdy$

2) $\displaystyle\iint_D \alpha fdxdy = \alpha \iint_D fdxdy$

(2) [**領域線型性**] 領域 D_1, D_2 に対し $m(D_1 \cap D_2) = 0$ のとき和集合 $C_1 \cup D_2$ を $D_1 + D_2$ と書く。ただし $m(X)$ は領域 X の面積とする。

$$\iint_{D_1+D_2} fdxdy = \iint_{D_1} fdxdy + \iint_{D_2} fdxdy$$

(3) [**単調性**] 任意の $(x, y) \in D$ に対し $f(x, y) \leqq g(x, y)$ となるとき

$$\iint_D fdxdy \leqq \iint_D gdxdy$$

(4) [**単位の値**] 値が 1 である定数関数 τ に対し

$$\iint_D \tau dxdy = m(D)$$

今まで面積というものが始めから存在するもののように取り扱ってきた。しかし，理論的には不正確であった。ここでそのことについて述べておく。面積というのは理論的には積分を用いて定義される。この新しい面積の定義はいままでの素朴な定義 (長方形の面積は縦×横等) を含んでいる事が分かる。またすべての図形が面積を持つ分けではない事も (証明はかなり難しいが) 分かる。

定理 5.3 [**重積分の平均値の定理**] D は連結とする。連結とは D 内の任意の 2 点が D 内の曲線で結べることをいう。f は D で連続とする。このとき D 内にある点 $P = (x_0, y_0)$ が存在して

$$\iint_D fdxdy = f(x_0, y_0)m(D)$$

となる。

証明　D は有界閉集合なので最大値 M を与える点 (x_1, y_2) と，最小値 m を与える点 (x_2, y_2) が存在する。このとき D の任意の点 (x, y) に対し $f(x_2, y_2) \leqq f(x, y) \leqq f(x_1, y_1)$ 即ち $m \leqq f(x, y) \leqq M$ が成立している。定理 5.2 (3) の単調性と (4) を用いると $mm(D) \leqq \displaystyle\iint_D fdxdy \leqq Mm(D)$ が分かる。$\mu = \dfrac{\displaystyle\iint_D fdxdy}{m(D)}$ とおくと，$m \leqq \mu \leqq M$ である。(x_1, y_1) と (x_2, y_2) を結ぶ曲線を C とすると，平均値の定理より (x_0, y_0) で $f(x_0, y_0) = \mu$ となる C 上の点 P が存在する。