5.2 累次積分

累次積分を標語的にいうと「2 重積分 $=$ 1 変数積分 2 回」である。3 重積分の場合は「3 重積分 $=$ 1 変数積分 3 回」，n 重積分の場合は「n 重積分 $=$ 1 変数積分 n 回」といえる。

最初に特別な形の領域に名前をつけておこう。領域 D が次の様に表す事ができるとき**縦線形**と呼ぶ。: 実数 a, b と $[a, b]$ で定義された連続関数 $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ が存在して

$$D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \right\}$$

と書ける。領域 D が次の様に表す事ができるとき**横線形**と呼ぶ。: 実数 c, d と $[c, d]$ で定義された連続関数 $x = h_1(y)$, $x = h_2(y)$ が存在して

$$D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y) \right\}$$

と書ける。

縦線形，横線形の領域は面積確定である。ある領域が縦線形でも横線形でもあるという場合もある。例えば円は縦線形かつ横線形である。例えば $D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$ とする。$D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2} \right\}$ となるので D は縦線形である。また $D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq y \leqq 1, -\sqrt{1 - y^2} \leqq x \leqq \sqrt{1 - y^2} \right\}$ となるので横線形でもある。

定理 5.4 D は縦線形とする。即ち $D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \right\}$ とする。$f(x, y)$ は D で定義された連続関数とする。このとき D における f の積分 (重積分) に対し次が成立する。

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy \right\} dx$$

また D が横線形のとき，即ち $D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y) \right\}$ と書けるとき重積分に対し次が成立する。

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y)dx \right\} dy$$

定理の 2 つの式の左辺は重積分，右辺は 1 変数積分を 2 回している事に注意。重積分を 1 変数関数の積分 2 回 (累次積分) に正しく直す事ができる様になる事がここのポイントである。領域が長方形の場合次の様に簡単になる。

系 5.5 D を長方形領域，即ち $D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \right\}$ とする。このとき次が成立する。

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y)dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y)dx \right\} dy$$

例をいくつか計算してみよう。最初に $I=\iint_D x^2ydxdy\ (D=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ \middle|\ x\geqq 0, y\geqq 0, x+y\leqq 1\right\})$ を考える。ここで略記法を 1 つ入れておく。$D=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ \middle|\ x\geqq 0, y\geqq 0, x+y\leqq 1\right\}$ の様な集合がよく出てくるのでこれを $\{x\geqq 0, y\geqq 0, x+y\leqq 1\}$ と略記することにする。D は縦線形とも横線形とも見る事ができるので 2 通りの計算を実行しよう。**注意**：重積分の計算のときは積分領域を**必ず図示する事**!! 縦線形と見ると $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1-x$ となるので,

$$I=\iint_D x^2ydxdy=\int_0^1\left\{\int_0^{1-x}x^2ydy\right\}dx$$

という累次積分の形にできる。後は 1 変数の積分を実行すればよい。実行すると

$$I=\int_0^1\left\{\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{1-x}\right\}dx=\int_0^1\left\{\frac{1}{2}x^2(1-x)^2\right\}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{x^2-2x^3+x^4\right\}dx=\frac{1}{60}$$

となる。このとき注意することが 1 つある。変数が 2 つあるため，定積分の計算の代入のとき，間違った変数に代入する事がある。そのために $\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{1-x}$ という記号を採用した。

D を横線形と見做して同様の計算ができる。$0\leqq y\leqq 1$, $0\leqq x\leqq 1-y$ なので,

$$I=\iint_D x^2ydxdy=\int_0^1\left\{\int_0^{1-y}x^2ydx\right\}dy$$

となり,

$$I=\int_0^1\left\{\left[\frac{1}{3}x^3y\right]_{x=0}^{1-y}\right\}dy=\int_0^1\left\{\frac{1}{3}(1-y)^3y\right\}dy=\frac{1}{3}\int_0^1\left\{y-3y^2+3y^3-y^4\right\}dy=\frac{1}{60}$$

を得る。