数理解析 II 要綱 #8	2003–1–28	河野

5.3 変数変換

1 変数の積分における変数変換 (置換積分法) を思い出そう。$x=\varphi(t)$ の関係があり $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$ となっているとき

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\frac{d\varphi}{dt}dt$$

であった。変数変換におけるポイントは 2 つある。1 つは積分領域が変わること，2 つ目は $\dfrac{d\varphi}{dt}$ という factor が付く事である。2 番目の $\dfrac{d\varphi}{dt}$ は x–座標での変化と t–座標での変化の比と考えられる。

重積分でこれにあたるのは何であろう。変数 x, y の組と変数 u, v の組があって，その間に $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ という関係があるとする。(x,y)–平面上のある領域 D を考える。この対応により (u,v)–平面上の領域 E と対応しているとする。1 変数の積分領域の変換は D から E への変換に対応する。2 番目の $\dfrac{d\varphi}{dt}$ に対応するのは何であろう。2 次元の場合それは面積比に対応する。1 次変換 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ では面積比はその行列式の絶対値 $|\det A| = |ad-bc|$ であった。一般の変換 $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ では局所的にはヤコビ行列の行列式 (ヤコビアン)$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\left(\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ がそれになる。重積分の場合の変数変換は次で与えられる。

定理 5.6 $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ なる対応で (x,y)–平面の領域 D と (u,v)–平面の領域 E が面積 0 の部分を除いて一対一対応していて，ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ が 0 になる領域は面積確定とする。このとき次が成立する。

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

例を考えよう。$D=\{x^2+y^2 \leqq 1\}$ とし，$c>0$ を定数とするとき，$I=\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2+c^2}dxdy$ を考える。$x=r\cos\theta, y=\sin\theta$ とする。$E=\{\,(r,\theta)\,|\ 0\leqq r\leqq 1, 0\leqq\theta\leqq 2\pi\}$ とおくと，この対応関係において，$r=0, \theta=0, \theta=2\pi$ の部分を除いて一対一であり，この部分は面積 0 である。ヤコビアンは $\dfrac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta, \dfrac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta, \dfrac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta, \dfrac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta$ なので $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$ なのでヤコビアンが 0 になる部分も面積 0(面積確定) である。よって，$I=\displaystyle\iint_E \frac{1}{r^2+c^2}rdrdt = \int_0^1\left\{\int_0^{2\pi}\frac{r}{r^2+c^2}d\theta\right\}dr = 2\pi\int_0^1\frac{r}{r^2+c^2}dr$ となる。後は 1 変数の積分である。ここで $t=r^2+c^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dr}=2r$ なので，$I=2\pi\displaystyle\int_{c^2}^{1+c^2}\frac{r}{t}\frac{1}{2r}dt = \pi\int_{c^2}^{1+c^2}\frac{1}{t}dt = \pi\log\frac{1+c^2}{c^2}$

次に $I=\iint_D (x+y)dxdy$ ($D=\{x^2+y^2\leqq 2x\}$) を考える。積分領域は $(1,0)$ を中心とする半径 1 の円なので $x-1=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと，対応する (r,θ)–平面での領域 E は $E=\{(r,\theta)|\ 0\leqq r\leqq 1, 0\leqq \theta 2\pi\}$ となる $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ であり定理の条件を満たしているので $I=\iint_E (1+r\cos\theta+r\sin\theta)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1(r+r^2\cos\theta+r^2\sin\theta)dr\right\}d\theta=\pi$ となる。

5.4 広義重積分

1 変数の広義積分と同様に 2 変数関数に対し広義積分を定義する。

定義 5.7 (0) $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合の列 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ が次を満たすとき，D の**近似増加列**という。
(1) 各 n に対し A_n は有開閉集合
(2) 各 n に対し $A_n\subset A_{n+1}\subset D$
(3) D に含まれる任意の有界閉集合 K に対し $K\subset A_n$ となる A_n
が存在する。

(1) まず $f(x,y)\geqq 0$ の場合を考える。$\{A_n\}$ を D の近似増加列とする。$I_n=\iint_{A_n} f(x,y)dxdy$ とする。$\lim_{n\to\infty} I_n$ が存在するとき，$f(x,y)$ は D で**広義積分可能**といい，この極限を $\iint_D f(x,y)dxdy$ と表す。

(2) 一般の場合 $f(x,y)$ に対し $f_+(x,y)=\max\{f(x,y),0\}$，$f_-(x,y)=-\min\{f(x,y),0\}$ とおく。このとき $f_+(x,y)\geqq 0$，$f_-(x,y)\geqq 0$，$f(x,y)=f_+(x,y)-f_-(x,y)$ となっている。$\iint_D f_+(x,y)dxdy, \iint_D f_-(x,y)dxdy$ が共に存在するとき (広義積分可能であるとき)，$f(x,y)$ は D で広義積分可能といい $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f_+(x,y)dxdy-\iint_D f_-(x,y)dxdy$ で定義する。

関数が定符号の時広義積分は近似増加列の選び方によらない事が知られている。

定理 5.8 $f(x,y)$ が D 上で連続で定符号とする。$\{A_n\},\{B_n\}$ を D の 2 つの増加近似列とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n} f(x,y)dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{B_n} f(x,y)dxdy$$

が成立する。