数理解析 II 要綱 #9

2003–2–4　　河野

5.5　3 重積分

n 変数関数に関する積分は n **重積分**と呼ばれる。本質的には 2 重積分と同じであるが記述は少し複雑になる。ここでは 3 重積分に関してあつかう。

1) 定義 最初に直方体 $E = \{(x,y,z) \mid a_1 \leqq x \leqq b_1, a_2 \leqq y \leqq b_2, a_3 \leqq z \leqq b_3\}$ で定義された有界な関数 $f(x,y,z)$ に関する定積分を定義する。E の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_\ell\,;\, y_0, y_1, \ldots, y_m\,;\, z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ とは $a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_\ell = b_1$, $a_2 = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b_2$, $a_3 = z_0 < z_1 < \ldots < z_n = b_3$ を満たすものをいう。$\max\{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1}, z_k - z_{k-1} \mid i = 1, \ldots, \ell, j = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, n\}$ を分割の最大幅といい $|\Delta|$ で表す。分割 Δ に対し

$$M_{ijk} = \max\{f(x,y,z) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j, z_{k-1} \leqq z \leqq z_k\}$$

$$m_{ijk} = \min\{f(x,y,z) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j, z_{k-1} \leqq z \leqq z_k\}$$

と置き,

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} M_{ijk}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

$$s(\Delta) = \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} m_{ijk}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

とする。$\lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta) = \lim_{|\Delta|\to 0} s(\Delta)$ となるとき，$f(x,y,z)$ は E で積分可能であるといい，この極限値を

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz$$

と書く。

一般の有界閉領域 D に対しては次の様に定義する。$D \subset E$ となる直方体領域 E をとる。$f(x,y,z)$ に対し $f_E(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & (x,y,z) \in D \\ 0 & (x,y,z) \notin D \end{cases}$ と定義する。f_E が E で積分可能のとき，f は D で積分可能であるといい,

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_E f_E(x,y,z)\,dxdydz$$

で定義する。

有界閉領域 D に対し $id_D(x,y,z) = \begin{cases} 1 & (x,y,z) \in D \\ 0 & (x,y,z) \notin D \end{cases}$ と定義する。id_D が D で積分可能のとき，領域 D は体積確定といい，$m(D) = \displaystyle\iiint_D id_D(x,y,z)\,dxdydz$ をその体積という。以下領域はすべて体積確定とする。

2) 累次積分 $D = \{\,(x,y,z) \mid\ g_1(y,z) \leqq x \leqq g_2(y,z), h_1(z) \leqq y \leqq h_2(z), a \leqq z \leqq b\}$ となっているとき,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left\{ \int_{h_1(z)}^{h_2(z)} \left\{ \int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)dx \right\} dy \right\} dz$$

となる。

例として球の体積を求めてみよう原点中心の半径 R の球を $D = \left\{\,(x,y,z) \middle|\ x^2+y^2+z^2 \leqq R\right\}$ とする。定数関数 1 を D で積分したものが球の体積である。

$$D = \left\{ (x,y,z) \middle|\ -R \leqq x \leqq R, -\sqrt{R^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{R^2-x^2}, -\sqrt{R^2-x^2-y^2} \leqq z \leqq \sqrt{R^2-x^2-y^2} \right\}$$

となるので,

$$V = \iiint_D dxdydz = \int_{-R}^{R} \left\{ \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left\{ \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \right\} dy \right\} dx = \int_{-R}^{R} \left\{ \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left\{ 2\sqrt{R^2-x^2-y^2} \right\} dy \right\} dx$$

となる。ここでこの積分を 2 重積分に再び直す。$E = \left\{\,(x,y) \middle|\ x^2+y^2 \leqq R^2\right\}$ とおくと

$$V = 2\iint_E \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$$

である。2 変数の変数変換で極座標に変換する。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと,

$$V = 2\int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} r\sqrt{R^2-r^2}d\theta \right\} dr = 4\pi \int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}dr = \frac{4\pi R^3}{3}$$

となる

2) 変数変換 $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ という関係で,(x,y,z)–空間の領域 D と (u,v,w)–空間の領域 E が体積 0 の部分を除き 1 対 1 に対応しているとする。ヤコビ行列は

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

ヤコビ行列式 (ヤコビアン) は

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$$

である。このとき

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_E f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} dudvdw$$

が成立する。

ここでは 3 次元の極座標表示を用いて,もう一度球の体積を求めてみよう。色々な置き方が考えれるが通常は次の形が用いられる。

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,,\ y = r\sin\theta\sin\varphi\,,\ z = r\cos\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

ヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ となるので，

$$V = \iiint_D dxdydz = \iiint_F r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

となる。ただし $F = \{\,(r,\theta,\varphi) \mid\ 0 \leqq r \leqq R, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\,\}$ とする。よって

$$V = \int_0^R \left\{\int_0^\pi \left\{\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta d\varphi\right\} d\theta\right\} dr = 2\pi\int_0^R \left\{\int_0^\pi r^2\sin\theta d\theta\right\} dr = 4\pi\int_0^R r^2 dr = \frac{4\pi R^3}{3}$$

を得る。