数理解析 I 要綱 #2　　　　2002–4–10　　　河野

0 論理の練習

ここでは数理解析を学ぶ準備として,「論理」(数学的な意味での)について簡単に触れておく。数学的と括弧を付けた理由は数学の論理は一般社会で使われている論理よりもある意味では厳密だがその全てを定式化できているわけではないという点にある。一般の社会で使われている論理にはいろいろなものがある。「正しい」「間違っている」という以外にも,「多分」「きっと」「べきである」等々色々なものが考えられる。数学的に定式化できているのはその「単純」な場合だけである。例えば,「風が吹いたのに雨が降った」と「風が吹いてかつ雨が降った」を区別できない(しない)。付け加えておくと,様相論理,ファジー論理等そのような拡張の試みもなされている。我々は以下で「論理」を取り扱うが一般の論理と区別したい時には特に**数理論理** (*mathematical logic*) または**記号論理** (*symbolic logic*) と呼ぶ。

「論理」のみを取り出して議論するのは,畳の上の水泳練習というきらいがないではない。数理解析の講義全体を通じてきちんと身につけるというのが本来であり理想であろう。しかし,1 つは講義で十分にふれることが出来ない事が予想される,2 つには高校時代「論理」的な訓練を殆んどされていないという状況だと思われる—以上の事から取り上げる事にした。

0.1 命題と論理

真 (T),または偽 (F) が定まっている文章を**命題** (*proposition*) という。

例 0.1 次の例で P_6,P_9,P_{11} は命題ではないが (P_9 は正しい命題?),それ以外は命題である。P_{11} は自己矛盾命題 (self–contradictory proposition) と呼ばれる。

P_1: $1 = 1$
P_2: $1 \geqq 1$
P_3: $1 \neq 1$
P_4: 2^{2003} は素数である。
P_5: 12345 は 3 で割り切れる。
P_6: 12345 は大きな数である。
P_7: 微分可能な関数は連続である。
P_8: 連続な関数は微分可能である。
P_9: 数学は難しい。
P_{10}: $n \geqq 3$ の自然数に対し $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない。
P_{11}: 「クレタ人は嘘つきである」とクレタ人であるエピメニデスが言った。

命題が幾つかあった時それを組合わせて新しい命題を作る方法がある。'**かつ**'(**論理積**,disjunction, logical product),'**または**'(**論理和**,conjunction, logical sum),'$\cdots$ **でない**'(**否定**,negation),'**ならば**' などがそれである。次の記号を使用する。

- $P \vee Q$:　P または Q である[1]

[1] 日常では "一方のみが正しい時正しい" という使われ方をする時がある。「ランチにはコーヒーまたは紅茶が付いております。」「両方下さい。」数理論理学でこれに対応するものとして排他的論理和がある。

- $P \wedge Q$: P かつ Q である
- $\neg P$: P でない
- $P \Longrightarrow Q$: P ならば Q である。

それぞれの記号の意味はほとんど明らかであろう。しかし，きちんと議論するためには次の様な真理表を使って定義する。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Longrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

ここで２つの注意：１つ目は「仮定が正しくないときの $P \Longrightarrow Q$ の真偽」である。日常の論理では「仮定部分 (P) が正しければ結論部分 (Q) が正しい」という使われ方はするが，仮定部分が偽のときの議論はあまりされない。数理論理では確定させておく必要があるが，何故この様に決めるのだろう。

２つ目は，我々がよく使っている記号‘ , ’(comma) には注意が必要である。例えば次の様な使い方をする。

$$x^2 - 1 = 0 \text{ を解いて } x = -1, 1$$

$$x \text{ は } x > 0, x^2 = 1 \text{ を満たすので } x = 1$$

最初の comma は or（または）で２番目のは and（かつ）である。どちらにも使えて便利であるが，混同しがちになるので注意する必要がある。

$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$ を $P \Longleftrightarrow Q$ と表す。真理表を書いてみると分るが $(P \Longleftrightarrow Q)$ は P と Q の真理値が等しい時，その時のみ真である。

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

命題変数 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ から $\vee, \wedge, \neg, \Longrightarrow$ を用いてつくられた論理式 $F(P_1, \ldots, P_n)$ が常に真 (T) になる時，$F(P_1, \ldots, P_n)$ をトートロジー (同語反復,tautology) という。例えば $P \vee (\neg P)$ はトートロジーである。

$X \Longleftrightarrow Y$ がトートロジーの時，X と Y は**同値**であるといい，$X \equiv Y$ と表す。定義からすぐ分るように X の真理表と Y の真理表が同じならば２つの論理式は同値である。

例 0.2
(1) $\neg(\neg P) \equiv P$(２重否定の法則)
(2) $(P \Longrightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$
(3) $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$(de Morgan の法則)

(4) $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$(de Morgan の法則)

(5) de Morgan の法則より，

$$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

$$P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

が成立する (ここで $\neg$ の連結度が強いという略記法を使った)。この事より，論理記号だけから言うと「$\neg$ と $\wedge$」または「$\neg$ と $\vee$」の２つだけあれば他の記号はなくとも良い。なくても表現できるが分りやすいかどうかは別問題である。

(6) **対偶**　$(P \Longrightarrow Q) \equiv (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$ である。これは元の命題と対偶命題が同値である事を示している。

演習問題 0.1　例 0.2 の (3),(4),(6) を示せ。

演習問題 0.2　次が正しい事を示せ。ただし，T は常に正しい命題，F は常に偽である命題とする。

(1) $P \wedge T \equiv P$, $P \vee T \equiv T$

(2) $P \wedge F \equiv F$, $P \vee F \equiv P$

(3) $P \vee P \equiv P$, $P \wedge P \equiv P$　(ベキ等律)

(4) $P \wedge \neg P \equiv F$　(矛盾率)

(5) $P \vee \neg P \equiv T$　(排中律)

(6) $P \vee Q \equiv Q \vee P$, $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$　(交換法則)

(7) $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$, $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$　(結合法則)

(8) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$, $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$　(分配法則)

(9) $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$, $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$　(吸収法則)

0.2　電気回路と論理

数理論理の１つの応用例として電気回路を取上げる。階段の上と下にスイッチがありどちらでも点滅の切り換えのできる回路を考える。回路を構成するスイッチを基本命題とし真であるということはスイッチが入っている事，偽は切れている事と考える。良く知られているように２つのスイッチ P，Q を直列に繋いだ回路は $P \wedge Q$ を実現していると考える事ができる。並列は $P \vee Q$ を実現していると考えられる。否定 $\neg P$ は何等かの構造でスイッチが切れている時電気が流れるシステムで実現されていると考える事ができる。

命題 P，Q から条件を満たすような回路に対応する論理式 $F(P,Q)$ をつくろう。Q の真偽によらず P の真偽で $F(P,Q)$ 真偽が変る必要がある。Q にとっても同様の条件が必要である。よって $F(P,Q)$ の真理表を仮に次の様に書くと

P	Q	$F(P,Q)$
T	T	A
T	F	B
F	T	C
F	F	D

A≠B,C≠D(Q の切り換えが有効になるために) と A≠C,B≠D(P の切り換えが有効になるために) が必要である。A=T または A=F によって２通りの場合があるが，ここでは A=T とする。この時真理表は

P	Q	$F(P,Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

となる。この真理表を持つ論理式は存在する。例えば $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$，$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$ などである。

勿論上の２つの論理式は同値である。これからそれぞれ回路を作る事ができる。この２つの回路は内部構造にまで立ち入ると実現のされ方は異なっている。しかし全体をブラックボックスと見て P,Q のスイッチの入り方で電気が流れるか流れないかという点のみに着目すると同じものと見る事ができる。いわば「製作者」の立場では違うが,「使用者」の立場では同じということができる。

演習問題 0.3　スイッチが３つある場合を考える。

(1) ３つの命題 P, Q, R に対し前述のような命題 (P, Q, R の真偽が変わるとその命題の真偽が変わるような命題) を１つ作れ。(**Hint:** ２個の場合に作った命題を利用せよ。)

(2) それに基づいて回路を設計せよ。

演習問題 0.4　すべての自然数 n と各 $i (i = 1, \ldots, n)$ について「他の $P_j (j \neq i)$ を固定して P_i の値だけを変化させた時 $F_n(P_1, \ldots, P_n)$ の値も変化する。」様な命題 F_n を構成せよ ($P_1, \ldots, P_n$ は命題)。

0.3　任意と存在

次に「任意」と「存在」について取上げる。数学の命題ではこの「任意」と「存在」が重要な役割を果たしている。最初は具体例。『実数から実数への写像 $y = f(x)$ が $x = a$ で極大である。』という命題を考える。これはきちんと書くと『ある正の実数 δ が存在して，任意の実数 x に対し $0 < |x - a| < \delta$ ならば $f(x) < f(a)$ である。』という事を意味している。テキスト２ページの問１でも，厳密に言うとそれらの前には任意の実数 $x_1, \ldots, x_n, x, y, z$ 等が省略されていて，それを付け加えなければ正確な命題とは言えない。このように数学的な「何か」を表現しようとすると「任意」「存在」は色々な所に顔を出す。

『x は３以上である。』というような叙述のように不定元を含んでいるものは真偽が定まらないので命題ではないが，x に具体的なものが代入されて得られる叙述は命題である。このようなものを命題関数といい，不定元が x である事を強調して $P(x)$ のように表す。

$P(x)$ が命題関数の時,「集合 M の任意の元 x に対し $P(x)$ が成立する。」という叙述は命題になる。たとえば 「$P(x)$: x は３以上」とするとき『任意の実数 x に対し $P(x)$ が成立する』というのは命題である (正しくない命題)。また,「元 x が集合 M に存在して，命題 $P(x)$ が成立する。」という叙述も命題になる。『ある実数 x が存在して $P(x)$ が成立する』は命題である (正しい命題)。

「任意」「存在」を含んだ命題の否定命題を作るときは注意が必要である。『集合 M の任意の元 x に対し命題 $P(x)$ が成立する。』の否定は『集合 M の任意の元 x に対し命題 $P(x)$ が成立しない。』ではない。$P(x)$ が成立しない元が１つでもあればよいので『元 x が集合 M に存在して，命

題 $P(x)$ が成立しない。』である。逆に『元 x が集合 M に存在して，命題 $P(x)$ が成立する。』の否定は『集合 M の任意の元 x に対し $P(x)$ が成立しない。』である。つまり否定命題を作る時は存在を任意に，任意を存在に変え命題を否定すればよいと言う事になる。

不定元が２つ (またはそれ以上) あるような命題関数を考える事ができる。例えば「$P(x,y)$: x は y より大きい」とするとき,『任意の実数 x に対し 実数 y が存在して $P(x,y)$ が成立する。』は命題である。同様に『ある実数 x が存在して任意の実数 y に対し $P(x,y)$ が成立する。』も命題である。これの否定命題はそれぞれ『ある実数 x が存在して任意の実数 y に対し $P(x,y)$ が成立しない。』『任意の実数 x に対しある実数 y が存在して $P(x,y)$ が成立しない。』である。

極限の数学的な定義は次のようである。『$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$』とは『任意の正の実数 ε に対しある正の実数 δ が存在して任意の実数 x に対し $|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成立する。』ことと定義する。また『$\lim_{n\to\infty} a_n = a$』とは『任意の正の実数 ε に対しある自然数 N が存在して任意の自然数 n に対し $n>N$ ならば $|a_n-a|<\varepsilon$ が成立する。』ことと定義する。

演習問題 0.5　『$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$』の否定命題を作れ。また『$\lim_{n\to\infty} a_n = a$』の否定命題を作れ。

演習問題 0.6　I で定義された関数 $y=f(x)$ を考える。$y=f(x)$ が $x=a$ で連続とは『$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$』と定義される。$y=f(x)$ が I で連続である (単に $y=f(x)$ は連続関数ともいう) とは，I のすべての点 a で『$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$』が成立する事と定義される。次の命題を「任意・存在」を用いてきちんと書き直せ。

(1) $y=f(x)$ が連続関数である。
(2) $y=f(x)$ が連続関数でない。
(3) 閉区間 I で定義された連続関数 $y=f(x)$ は最大値をとる (最大値定理)。
(4) 区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $y=f(x)$ が $f(a)<0<f(b)$ を満たせば $f(c)=0$ となる点 c $(a<c<b)$ が存在する (中間値の定理)。

最期に付け足しとして論理記号を導入しておこう。これは興味ある人は読んでください。

‘任意’ に対し ‘$\forall$’ という記号を導入して，

$$\forall x \in M, P(x) \qquad \text{または} \qquad \forall x (x \in M \Longrightarrow P(x))$$

と表す ($\forall$ を全称記号という)。これを ‘存在’ に対し $\exists$ という記号を導入して，

$$\exists x \in M; P(x) \qquad \text{または} \qquad \exists x (x \in M \wedge P(x))$$

と表す。

この記号はなかなか便利であるし論理構造を明確にする。例えば，否定命題を作ってみよう。以前考えた事を論理記号で書くと

$$\neg(\forall x \in M, P(x)) \Longleftrightarrow \exists x \in M;\ \neg P(x)。$$

同様に存在については

$$\neg(\exists x \in M; P(x)) \Longleftrightarrow \forall x \in M, \neg P(x)$$

となる (de Morgan の法則)。つまり否定命題を作る時は存在を任意に，任意を存在に変え命題を否定すればよいと言う事になる。

例として２人でやるゲームの必勝法の問題を考える。例えば,「A,B ２人がいて各自勝手な自然数を順に言って勝負を決める」ゲームを考える。A は k_1 と言い，B は k_2 と言ったとする。勝負を決めるルールはあらかじめ $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ の部分集合 X が決まっていて，$(k_1,k_2)\in X$ なら A の勝ち，$(k_1,k_2)\notin X$ なら B の勝ちとする。例えば，$X=\{(m,n)\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N} \mid m\geq n\}$ とすると「大きい数を言った方の勝ち」というルールになる (正確には先手は小さくない数をいえば勝ち)。

この時どんなルール X に対しても,「両方に必勝法がある」ことは起らないが，A か B のどちらかに必勝法はあるのだろうか。一見分りにくいが必勝法ということを論理記号で書いてみよう。
「A に必勝法がある」という命題を P,「B に必勝法がある」という命題を Q とする。この時，論理記号を使うと,

$$P: \quad \exists k_1 \in \boldsymbol{N}, \forall k_2 \in \boldsymbol{N}; (k_1, k_2) \in X$$

$$Q: \quad \forall k_1 \in \boldsymbol{N}, \exists k_2 \in \boldsymbol{N}; (k_1, k_2) \notin X$$

となる。つまり，$\neg P = Q$ である事はすぐ分るので P または Q，つまりどちらかに必勝法がある。