数理解析 I 要綱 #4　　　2002–4–24　　　河野

1.3 連続関数

「関数」という概念は微積分学というドラマの主人公ともいえるものである。江戸時代日本に「和算」と呼ばれた「数学」があり微積分と似たような事をやっていた。しかしその後の発展には結びつかなかった。私見ではあるが，2 大弱点として‘『生産』と結び付かない’所謂「芸事」であった事に加え，理論的には‘「関数概念」がなかった’事が挙げられる。

「関数」概念は歴史的に変化 (発展) しており現代的立場と古典的立場がある。古典的な立場は‘解析的な式で表されているものが関数である。’とするもので現代的立場はそれに拘らず‘対応’ということを前面に出す。ここでは現代的定義を与えるが，実際の講義の中では古典的定義が所々で顔を出すかもしれない。

定義 1.8 2 つの集合 X，Y に対し X の各元 x に対し Y の元 y を対応させる規則 f が与えられている時 f を X から Y への関数といい，

$$f : X \to Y$$

と書く。元 x に元 y が対応している時 $y = f(x)$ と表す。X を定義域 (始域)，Y を終域，$\{y \mid y = f(x), x \in X\}$ を値域という。

現代的立場では厳密には関数 f と元 x における関数の値 (この言い方は少し古典的であるが) $f(x)$ は区別する。例えば 2 次関数をそれぞれの立場でいうと，古典的立場でいうと，式 $y = f(x) = x^2$ が与えられたら関数が定まったと考える。しかし現代的には対応であるから始域，終域を決めなくてはならない。例えば $X = \boldsymbol{R}$(始域)，$Y = \boldsymbol{R}$(終域) とし，x に対し x^2 を対応させる規則を f とする。この立場では (厳密には) 終域を $Y' = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \geqq 0\}$ としたものは前とは違う関数になる。これではいかにも片苦しい。講義では一応現代的定義を採用するが，適宜古典的取り扱いもする。

注意 1.9 定義 1.8 では X, Y に制限を加えなかったが，関数というときには，X, Y は数の集合 (複素数の部分集合) であるのが普通である。始域，終域が実数の (部分集合の時) 時「実関数」，複素数の (部分集合) の時「複素数値関数」または「複素関数」という。我々は専ら実関数を取り扱う。(工業数学 II で複素関数を扱う。) 古典的な使用法として多価関数というものもあるが，この講義では関数の仲間に入れない。(工業数学 II では関数の仲間に入れるかもしれない。)

定義 1.10 2 つの関数 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ に対し関数 $h : X \to Z$ で $h(x) = g(f(x))$ となるものが存在する。この関数 h を f と g の合成関数といい $h = g \circ f$ と表す。

関数 $f : X \to Y$ が上への 1 対 1 写像[(1)]である時，$y = f(x)$ の時，y に対し x を対応させる写像が考えられる。これを f の逆関数といい f^{-1} で表す。

関数の中でも「連続関数」に我々は興味がある。直感的にはグラフがつながっているという感じだが，定義は極限に基づいてされるのでグラフが書けそうもないものもある。

[(1)] $f : X \to Y$ が 1 対 1 とは $f(x_1) = f(x_2)$ なら $x_1 = x_2$，上への写像とは任意の $y \in Y$ に対し $y = f(x)$ となる元 $x \in X$ が存在する事である。

定義 1.11 $f : I \to \boldsymbol{R}$ をある区間 I で定義された関数とする。

(1) $a \in I$ に対し $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$ が成立する時関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続という。

(2) I の任意の点で連続の時 f は I で連続という。

閉区間で定義された関数の場合極限といっても右 (左) からだけしか近づけない場合がある。右極限・左極限を定義しておこう。

関数 $f(x)$ が $x > a$ を保ちながら a に近づく時 $f(x)$ が A に近づく時右極限といい $\lim_{x \longrightarrow a+0} f(x) = A$ と書く。ε-δ 論法でいうと，“任意の正の実数 ε に対しある正の実数 δ が存在して $0 < x - a < \delta$ となる任意の実数 x に対し $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成立する。” である。左も同様。区間の右 (左) 端での連続は右 (左) 極限で定義する。

演習問題 1.1 次の関数 $f(x)$ は連続かどうか調べよ。

(1) $y = \dfrac{1}{x}$

(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が無理数または } 0) \\ \dfrac{1}{q} & (x \text{ が } 0 \text{ 以外の有理数で } x = p/q \text{ のとき，ただし } p \text{ と } q \text{ は互いに素} \\ & \text{な整数で } q > 0) \end{cases}$

連続関数の幾つかの性質を紹介する。これはそれぞれ大事な性質である。

定理 1.12 (最大値の定理) 閉区間で定義された連続関数は最大値をとる。

定理 1.13 (中間値の定理) 連続関数は中間値をとる。即ち，閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f が $f(a) < f(b)$ を満たしているとする考える。$f(a) < \alpha < f(b)$ となる任意の α に対しある c $(a < c < b)$ が存在して $f(c) = \alpha$ となる。

定理 1.14 (逆関数の定理) 単調連続であれば逆関数が存在して，その逆関数も連続関数になる。

最大値定理は「実数の連続性」から導かれる。そして最大値定理を用いて「微積分の基本定理」が証明される。