数理解析 I 要綱 #6　　2002–5–15　河野

1.6 平均値の定理

この節で取り上げる平均値の定理は微積分学全体の中でもキーポイントとなる重要な定理である。これを証明するために実数論が作られたといってよい。「或る区間で $f'(x) > 0$ ならはそこで単調増加」という命題もこの定理から導かれる[1]。

定理 1.18 [平均値の定理] 関数 f は $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能とする。このときある c $(a < c < b)$ が存在して

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成立する。

この定理を示すために次の定理を用いる。

定理 1.19 [Rolle(ロル) の定理] 関数 f は $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能とする。$f(a) = f(b)$ ならばある c $(a < c < b)$ が存在して $f'(c) = 0$ が成立する。

証明　最大値定理より最大値を与える c が存在する。今 $a < c < b$ を仮定する。c は最大値を与えるので任意の h に対し $c+h$ が区間 $[a, b]$ に入っていれば $f(c+h) \geqq f(c)$ が成立する。$h > 0$ のとき $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqq 0$ なので $\displaystyle\lim_{h \to +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqq 0$ が成立する。また $h < 0$ のとき $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqq 0$ なので $\displaystyle\lim_{h \to +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqq 0$ が成立する。よって $f'(c) \geqq 0$ かつ $f'(c) \leqq 0$ が成立するので，$f'(c) = 0$ である。

途中 $a < c < b$ を仮定したが，これが成立しない場合は $f(a) = f(b)$ が最大値となっている。f が定数関数の場合は定理は成立しているので定数関数でないと仮定する。このときは前述の議論を最小値に関して行えばよい。 ■

この定理から平均値の定理が示されるが，ここでは平均値の定理を一般化した次の定理を示す。次の定理で $g(x) = x$ とすれば平均値の定理が従う。

定理 1.20 [Cauchy(コーシー) の平均値定理] 関数 f, g は $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能とする。$[a, b]$ で $g'(x) \neq 0$ ならばある c $(a < c < b)$ が存在して

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

が成立する。

証明　天下りではあるが $F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$ とおく。この関数 F は $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能である。また $F(a) = 0$, $F(b) = 0$ が成立する。よって平均値の定理より c $(a < c < b)$ が存在して $F'(c) = 0$ が成立する。$F'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$ な

[1] この節で扱う話題は数学 III で学んでいる。数学 III を学んでいるものにとっては復習のつもりで。

ので $F'(c)=(f(b)-f(a))g'(c)-(g(b)-g(a))f'(c)$ が成立する。ここで $g'(x)\neq 0$ なので $g(b)-g(a)=0$ なら平均値の定理に矛盾ので，$g(b)-g(a)\neq 0$ がとなる。よって割り算を実行すれば定理が得られる。 ∎

平均値の定理から次の系が従うがその前に 1 つ定義をしておく。

定義 1.21 関数 f が区間 I で定義されているとする。I に属する任意の x_1, x_2 に対し「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$」が成立するとき**単調増加**であるという。I に属する任意の x_1, x_2 に対し「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$」が成立するとき**単調減少**であるという。

I に属する任意の x_1, x_2 に対し「$x_1 \leqq x_2$ ならば $f(x_1) \leqq f(x_2)$」が成立するとき**単調非減少**であるという。I に属する任意の x_1, x_2 に対し「$x_1 \leqq x_2$ ならば $f(x_1) \geqq f(x_2)$」が成立するとき**単調非増加**(2)であるという。

系 1.22 f, g は区間 I で微分可能とする。
(1) 区間 I において $f'(x)=0$ ならば $f(x)$ は定数関数である。
(2) 区間 I において $f'(x)=g'(x)$ ならばある定数 C が存在して $f(x)=g(x)+C$ と書ける。

証明 区間内の任意の x_1, x_2 について，$x_1 < x_2$ とすると平均値の定理よりある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$ と書ける。条件より $f'(c)=0$ なので $f(x_2)-f(x_1)=0$ 即ち任意の x_1, x_2 に対し $f(x_2)=f(x_1)$ が成立する。これは f が定数関数である事を示している。

(2) は $h(x)=f(x)-g(x)$ とおき，$h(x)$ に (1) を適用すればよい。 ∎

系 1.23 f は区間 I で微分可能とする。
(1) 区間 I において $f'(x)>0$ ならば f は単調増加である。
(2) 区間 I において $f'(x)<0$ ならば f は単調減少である。

証明 (2) のみ示そう。$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$ と書ける。このとき $f'(c)<0, x_2-x_1>0$ より $f(x_2)-f(x_1)<0$ 即ち $f(x_1)>f(x_2)$ となる。よって f は単調減少である。 ∎

系 1.24 f は区間 I で微分可能とする。
(1) 区間 I において $f'(x)\geqq 0$ ならば f は単調非減少である。
(2) 区間 I において $f'(x)\leqq 0$ ならば f は単調非増加である。

証明 (2) のみ示そう。$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$ と書ける。このとき $f'(c)\leqq 0, x_2-x_1>0$ より $f(x_2)-f(x_1)\leqq 0$ 即ち $f(x_1)\geqq f(x_2)$ となる。よって f は単調非増加である。 ∎

これらの系について一言注意。系 1.22 は後期微積分の基本定理を証明するときキーになる命題である。系 1.23，1.24 は高校数学において書いた増減表の基礎にある命題である。

平均値の定理を少し拡張した形で書き直そう。$b=a+h$ とし，$\theta=\dfrac{c-a}{h}$ とおくと平均値の定理は

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h \qquad (0<\theta<1)$$

(2) この単調増加，単調減少，単調非減少，単調非増加の定義はテキストとは異なっている。ここでの定義とテキストとは単調増加 $\Longleftrightarrow$ 狭義の増加，単調減少 $\Longleftrightarrow$ 狭義の減少，単調非減少 $\Longleftrightarrow$ 増加，単調非増加 $\Longleftrightarrow$ 減少という対応がある。

となる θ が存在するという形になる。この形で考えると，h が負のときも定理は成立する。即ち次の形で述べる事ができる。「関数 f は区間 I で微分可能とする。$a, a+h$ が区間 I に属しているときある θ $(0<\theta<1)$ が存在して $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$ と書ける。」

I. 不定形の極限

ここでは平均値の定理の応用として 3 つの事を取り上げる。最初は不定形の極限である。関数の比の極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ を求める事を考える。$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=B\neq 0$ のときは特に問題はない。$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=A$ とすると $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$ となる。$B=0$ のとき $A\neq 0$ ならばこの極限は収束しない。よって残るのは $B=A=0$ のときのみである。この場合不定形といい，$f(x), g(x)$ によって結果が異なる。不定形の極限に関しては次の定理が有効である場合が多い。

定理 1.25 [L'Hôpital(ロピタル) の定理] $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0,\ \lim_{x\to a}g(x)=0$ のとき下式の右辺が収束すれば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立する。

例として $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ を考えよう。ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

次は少しひねった例 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ を考える $(a,b>0)$。$f(x)=\displaystyle\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ と置く。ここで $\displaystyle\lim_{x\to 0}\log f(x)$ を計算する。

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\log f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\log(a^x+b^x)-\log 2}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\log(a^x+b^x)-\log 2)'}{(x)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{a^x\log a+b^x\log b}{(a^x+b^x)}\\
&= \frac{\log a+\log b}{2}=\log\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

ここで $y=\log x$ は $\sqrt{ab}$ で連続なので $\displaystyle\lim_{x\to 0}\log f(x)=\log\left(\lim_{x\to 0}f(x)\right)$ が成立する。よって

$$\log\left(\lim_{x\to 0}f(x)\right)=\log\sqrt{ab}$$

が成立する。$y=\log x$ の単調性より $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\sqrt{ab}$ が得られる。

ロピタルの定理は $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a}g(x)=\infty$ の場合も成立する。この様な形も不定形と呼び ∞/∞ タイプの不定形と呼ぶ。この言い方でいうともとの形は $0/0$ タイプという。他に $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 等の不定形がある。

演習問題 1.5　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\quad(a,b>0)$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\log(x^2+1)-\log x^2\right)$

II. 極値

関数の極値に関して復習をしよう。関数 f が $x=c$ の周りで定義されていて, $x=c$ の十分近くでは $f(x)<f(c)$ が成立するとき f は $x=c$ で**極大**であるという。もう少しきちんと言うとある正の数 δ が存在して $0<|x-c|<\delta$ のとき $f(x)<f(c)$ が成立するとき極大であるという。$f(x)$ を**極大値**という。同様に関数 f が $x=c$ の周りで定義されていて, $x=c$ の十分近くでは $f(x)>f(c)$ が成立するとき f は $x=c$ で**極小**であるという。もう少しきちんと言うとある正の数 δ が存在して $0<|x-c|<\delta$ のとき $f(x)>f(c)$ が成立するとき極小であるという。$f(x)$ を**極小値**という。極大値・極小値を総称して**極値**という。極値に関しては次が成立した。

命題 1.26 微分可能な関数 f が $x=c$ で極値をとれば $f'(c)=0$ が成立する。

証明　極小値の場合のみ示す。f は $x=c$ で極小なので，ある正数 δ が存在して任意の h に対し $|h|<\delta$ を満たすならば $f(c+h)<f(c)$ となっている。$h>0$ のときは $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}<0$ なので $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqq 0$ が成立する。また $h<0$ のときは $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}>0$ なので $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geqq 0$ が成立する。よって $f'(c)=0$ である。∎

$y=f(x)=x^3, x=0$ の場合から分かるように命題 1.26 の逆は成立しない。

III. 関数の概形

関数の増減及び極値が分かれば関数の (グラフの) 概形を書く事ができる。ここではもう少し正確に書くため関数の凹凸に関して復習しておく。

区間 I 上で定義された関数 f を考える。f のグラフ上の任意の 2 点 A,B に対して，グラフの A,B の間にある曲線が線分 AB の上側にないとき f は I で**下に凸**であるという。条件を式で書くと任意の $x_1,x_2\in I$ と $\alpha+\beta=1,\alpha>0,\beta>0$ を満たす任意の α,β について

$$f(\alpha x_1+\beta x_2)\leqq \alpha f(x_1)+\beta f(x_2)$$

が成立する。逆に線分 AB の下側にないとき f は I で**上に凸**であるという。

命題 1.27 I で定義された微分可能な関数 f について，f' が I で非減少ならば f は下に凸である。f' が I で非増加ならば f は上に凸である。

演習問題 1.6　次の関数の概形を書け。

(1) $y=x^{-x^2}$　　(2) $y=xe^{-x^2}$

(3) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$　　(4) $y=x\log x\quad(x>0)$

(5) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$　　(6) $y=e^{-x}\sin x$