

## 2 多変数関数の微分 (偏微分)

この章では多変数関数の微分を扱う。1つのファクターで決定される事象を形式化したのが1変数関数とするならば、多変数関数はいくつかの(複数個の)ファクターによって決定される事象を形式化したものといえる。多変数関数は定義域自身も複雑な場合があるのでその話から始める。

### 2.1 点集合

講義ではあとで述べるような限定をして取り扱うので、厳密には取り扱わない。ただしプリントにはきちんと書いておこう。

**距離** 平面内の点集合をとらえるとき、基礎になるのが距離の概念である。 $P = (x, y), Q = (x', y') \in \mathbf{R}^2$  に対し  $d(P, Q) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$  とおくと、

- (1) 正值性 :  $d(P, Q) \geq 0$ 。等号成立は  $P = Q$  のときのみ
- (2) 対称性 :  $d(P, Q) = d(Q, P)$
- (3) 3角不等式 :  $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$

が成立する。空間の時も同様な事が成立する。逆に、性質 (1)–(3) が成り立つようなものを距離と考える。

**定義 2.1** 以下、もっぱら2次元(平面)に関して議論するが、同様の事は  $n$ 次元空間<sup>(1)</sup>でも同様の議論はできる。

$U_\varepsilon(P) = \{Q \in \mathbf{R}^2 \mid d(Q, P) < \varepsilon\}$  を  $P$  の  $\varepsilon$ -近傍という。 $\mathbf{R}^2$  の部分集合を1つ固定して  $A$  とする。 $P$  の任意の  $\varepsilon$ -近傍が  $A$  と共通点を持つとき、 $P$  を  $A$  の内点という。 $A$  の内点全体の集合を  $\overset{\circ}{A}$  と書く。

$P$  の  $\varepsilon$ -近傍で  $A$  と共通部分がないものが存在するとき、 $P$  を  $A$  の外点という。 $A$  の外点でも内点でもない点を境界点といい、境界点全体の集合を  $\partial A$  と書く。

$A$  に対し  $\partial A \subset A$  となるとき、 $A$  を閉集合という。 $\partial A \cap A = \emptyset$  となるとき  $A$  を開集合という。

$A$  が次の性質を持つとき**連結**(connected)であるという: 任意の2点  $P, Q \in A$  に対し区間  $I = [a, b]$  から  $A$  への連続写像で  $f(a) = P, f(b) = Q$  となるものが存在する。

連結な開集合を領域という。 $D$  が領域の時  $D \cup \partial D$  を  $\bar{D}$  で表わしこれを閉領域という。(閉)領域がある円板  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq M\}$  に含まれる時有界であるという。

**注意 2.2 (大事な限定)** 以下、我々はほとんどの場合、集合は『有限個のなめらかな曲線でかこまれた図形』に限る事にする。

$E$  をそのようなものとする。『有限個の滑らかな曲線』が  $\partial E$  となる。

<sup>(1)</sup>  $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R} (i = 1, \dots, n)\}$  を  $n$ 次元空間と呼び、その元  $P = (x_1, \dots, x_n)$  を点と呼ぶ。2点  $P = (x_1, \dots, x_n), Q = (y_1, \dots, y_n)$  間の距離を  $d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$  で定義する。

## 2.2 多変数関数

多変数関数は一般に独立変数が 2 個以上である関数をいうが、我々はおつぱら 2 変数関数に関して議論する (一部 3 変数関数も扱う)。一般の  $n$  変数関数は以下の 2 の部分を  $n$  に変えればほぼ同様にできる。一般に  $\mathbf{R}^2$  の部分集合  $D$  で定義された関数を 2 変数関数と呼び、

$$f : D \longrightarrow \mathbf{R}$$

と表わす。多変数関数は 1 変数関数と異なりグラフがあまり役にたたない。独立変数が 2 個の時は辛うじてグラフが書けるが 3 次元的なのでわかりにくい。等高線で表わす方法もあるが全容はとらえにくいし、変数の個数が多くなると書けなくなる。

**定義 2.3 (極限)**  $D$  で定義された関数

$$f : D \longrightarrow \mathbf{R}$$

に対し、 $P = (x, y)$  を限りなく  $P_0 = (a, b)$  に近づけた時、 $f(P) = f(x, y)$  が限りなくある値  $A$  に近づく時 (つまり、 $d(P, P_0) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  を限りなく 0 に近づける時、 $|f(P) - A|$  が限りなく 0 に近づく時)、

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x,y) = A$$

$$f(P) \longrightarrow A \quad (P \longrightarrow P_0) \quad f(x,y) \longrightarrow A \quad ((x,y) \longrightarrow (a,b))$$

などと書き、 $P$  を  $P_0$  に近づけた時の  $f(P)$  の極限と言う。

**例 2.4**

$$(1) f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ((x, y) \neq (0, 0)) \text{ は}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$$

である。何故なら  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  と極座標表示してみる。 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  という事は  $\theta$  が色々な変化をしながら  $r \rightarrow 0$  となる事を意味する。 $f(x, y)$  を極座標で書き直すと  $f(x, y) = \frac{r \cos \theta r \sin \theta}{r} = r \cos \theta \sin \theta$  となり、これは  $r \rightarrow 0$  のとき  $f(x, y) \rightarrow 0$  となる。

$$(2) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0)) \text{ に関して考える。同様に極座標で書き直すと } f(x, y) = \frac{r \sin \theta r \cos \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta \text{ なので、} \theta \text{ の変化に依存する。例えば } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ を保ちながら } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ とすると } f(x, y) \text{ は } \frac{1}{2} \text{ に収束するし、} \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ を保ちながら } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ とすると } f(x, y) \text{ は } -\frac{1}{2} \text{ に収束する。多変数の収束の定義は近付き方によらず一定の値に収束する事なので、この場合収束しない。}$$

**注意 2.5** 多変数の極限と累次極限を混同しないように。前の例の 2 番目は累次極限は存在する。ここで類似極限とは

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$$

の様な形の極限である。上の例でいうと最初に  $y$  を  $b$  に近づけ、次に  $x$  を  $a$  に近づけるものである。それに対し多変数の極限は  $x$  と  $y$  を同じに近づけるものである。多変数の極限が存在すれば類似極限は存在するが、逆は正しくない。

**定義 2.6**  $D$  で定義された関数  $f(P) = f(x, y)$  が点  $P_0 = (a, b)$  で連続とは

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = f(a, b)$$

が成立する事を言う。定義域  $D$  の各点で連続の時  $f(P)$  は  $D$  で連続であるという。この時  $f$  を単に連続関数という。

連続関数の和、差、積、商等が連続関数になるのは 1 変数関数と同じ。合成関数の連続性も同じ。最大値定理に対応するのが次の命題である。

**定理 2.7 (最大値定理)** 有界閉集合で定義された連続関数は最大値をとる。

1 変数関数の場合最大値定理を用いなくても、増減表を用いる事により最大・最小を用いる事ができた。多変数関数では最大・最小の問題をきちんと扱おうとするとこの定理は不可欠になる。

### 2.3 偏微分

1 変数関数の微分の場合、「導関数が存在する」という事と「接線が存在する」という事は同じ概念であった。しかし 2 変数以上で微分を考えると 2 つは異なる概念となる。定義 2.8 (偏微分可能性) は「導関数が存在する」事に対応する。定義 2.9 (全微分可能性) は「接線が存在する」事に対応する。この様に 1 変数関数では同じに見えた概念が 2 つに分裂する。微分法で基本的なのは後者 (全微分可能性) である。

偏導関数とは 2 変数関数  $f(x, y)$  に対して、例えば  $x$  のみを変数と見て微分したものである。

**定義 2.8 (偏導関数)** 関数  $z = f(x, y)$  が  $(x, y) = (a, b)$  において  $x$  に関して ( $y$  に関して) 偏微分可能とは

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$\left( \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \right)$$

が収束する事を言う。この時この極限値を

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad f_x \quad z_x$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \quad f_y \quad z_y \right)$$

と書く。 $x$  に関しても  $y$  に関しても偏微分可能の時、単に偏微分可能と言う。各点で偏微分可能の時 1 変数と同じ様に導関数を考える事ができる。これらを  $x$  に関する ( $y$  に関する) 偏導関数と言う。

偏微分可能という条件は弱い条件である。偏微分可能であるが連続でない例が存在する。次の関数は原点で偏微分可能であるが連続ではない。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**演習問題 2.1** 上の関数が原点において連続でない事を示せ。また原点における偏導関数を求めよ

1 変数の「接線が存在する」という概念は 2 変数関数では「接平面が存在する」となる。定義 2.9 がそれに対応する。

**定義 2.9 (全微分可能)**  $f(x, y)$  は点  $(a, b)$  のまわりで定義されていて、 $(a, b)$  で偏微分可能<sup>(2)</sup>とする。

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおく。 $f(x, y)$  が  $(a, b)$  で**全微分可能**とは

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$$

となる時をいう。全微分可能を単に**微分可能**という場合もある。

定義 2.9 でいうと、 $(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k$  が接平面を表している。(ここでは  $h, k$  を変数と見ている。) 条件は関数と平面の差が非常に小さくなる事を意味している。

全微分可能を直接示すのは面倒な場合もあるが、次の定理が成立するので、我々の扱う多くの関数は全微分可能である事が分かる。

**定理 2.10**  $f_x, f_y$  が存在して、そのいずれかが連続なら  $f$  は全微分可能である<sup>(3)</sup>。

**演習問題 2.2** 演習問題 2.1 の関数は原点で全微分可能でない事を示せ。

**演習問題 2.3** 次の関数の偏導関数を求めよ。

(1)  $z = x^3 - 3xy + y^3$

(2)  $z = (x^3 + y^4)^{100}$

(3)  $z = \frac{x-y}{2x+3y}$

(4)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

(5)  $z = e^{ax^2+by^2}$

(6)  $z = x \arctan \frac{x}{y}$

(7)  $z = xy \sin(x^2 + y^2)$

(8)  $z = x^2 y^2 \log(x^3 + y^3)$

(9)  $z = xy \arcsin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(10)  $z = x^x y^y x^y y^x$

<sup>(2)</sup> 偏微分可能性は仮定しなくても、全微分可能性から従うが、ここでは叙述の簡易化のため仮定しておく。

<sup>(3)</sup> 証明は省略。テキスト p83 参考の事