数理解析 I 要綱 #10 　　2003–6–11　　河野

2.6 高階偏導関数とテーラーの定理

関数 $z = f(x, y)$ の導関数 f_x, f_y が偏微分可能のとき更に導関数を考える事ができる。f_x の x に関する導関数 $(f_x)_x$, y に関する導関数 $(f_x)_y$ を f_{xx}, f_{xy} と書く。また f_y の導関数も同様に定義できる。これらを 2 階の偏導関数と呼ぶ。3 階以上の偏導関数も同様に定義される。$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ の表し方で言うと，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を x で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ と書く。同様に $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を y で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ と書く。$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を x で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 表す。$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を y で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ と表す。

f_{xy} は f を最初は x で微分し次に y で微分したものである。f_{yx} は f を最初は y で微分し次に x で微分したものであり，この 2 つは一般に違うものである。しかしある条件の元では一致する。

定理 2.19 [**シュワルツの定理**] 点 (a, b) の近傍で，f_x, f_y, f_{xy} が存在して，f_{xy} が (a, b) で連続ならば，f_{yx} も存在して $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ が成立する。

系　$f(x, y)$ が C^2 級 (2 階の偏導関数が存在して連続) ならば $f_{xy} = f_{yx}$ である。

関数 $f(x, y)$ が C^n 級 (n 階までの導関数が存在して連続) であれば n 階までの導関数は x, y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

多変数のテーラーの定理を述べるために次の記号を導入する。この記号を使用しないと，定理を書き下すだけで結構な手間である。

定義 2.20 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ を独立したものとして扱い $\dfrac{\partial}{\partial x}f$ は $\dfrac{\partial}{\partial x}$ が f に作用していると見なす。このとき形式的に $D = h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}$ と定義する。このとき $Df = h\dfrac{\partial}{\partial x}f + k\dfrac{\partial}{\partial y}f$ と見る。また $D^2 = \left(h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ と考える。一般に

$$D^n = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^{n-r} k^r \frac{\partial^n}{\partial x^{n-r} \partial y^r}$$

と見る。

定理 2.21 [**テーラーの定理**]

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + Df(x, y) + \\ &\quad \cdots + \frac{1}{r!}D^r f(x, y) + \\ &\quad \cdots + \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1} f(x, y) + \frac{1}{n!}D^n f(x + \theta h, +y + \theta k) \end{aligned}$$

となる θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。

$z = f(x,y) = x^2e^y$ に対し $(x,y) = (1,1)$ でテーラー定理を用いて展開して見よう。1 変数の定理の場合と同様に，定理の $\dfrac{1}{n!}D^n f(x+\theta h, +y+\theta k)$ の項を剰余項といい R_n で表す。ここでは剰余項を無視した近似を考える。$X = x+h, Y = y+k$ とする。最初に $n=2$ の場合を考える。$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2e^y$ なので $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2e$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = e$ である。よって

$$f(X,Y) \cong e + 2e(X-1) + e(Y-1)$$

である。$n=3$ の場合は

$$f(X,Y) \cong e + 2e(X-1) + e(Y-1) + e(X-1)^2 + 2e(X-1)(Y-1) + \frac{1}{2}e(Y-1)^2$$

演習問題 2.10　次の関数を (a,b) において $n=3$ としたテーラー展開を求めよ。

(1) $z = f(x,y) = (x-1)(y+2) \qquad (a,b) = (0,0)$

(2) $z = f(x,y) = \dfrac{1}{1-2x+3y} \qquad (a,b) = (0,0)$

(3) $z = f(x,y) = \sin(x+y) \qquad (a,b) = (\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$

2.7　極値

ある点 (a,b) の周りで $f(a,b)$ の値が他の $f(x,y)$ より大きいとき**極大値**という。逆に他の値より小さいとき**極小値**という。正確に言うと，ある正数 δ が存在して，$0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta$ ならば $f(x,y) < f(a,b)$ が成立しているとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極大といい，$f(a,b)$ を極大値という。$f(x,y) \leqq f(a,b)$ が成立するとき広義の極大といい，$f(a,b)$ を広義の極大値という。極小も同様に定義できる。極大値・極小値合わせて極値という。

関数 $z = f(x,y)$ が $f_x(a,b) = 0$ かつ $f_y(a,b) = 0$ を満たすとき，点 (a,b) を**臨界点**と呼ぶ。1 変数関数と同様に $z = f(x,y)$ が点 (a,b) で (広義の) 極値をとれば，(a,b) が臨界点である事が分かる。この逆の「臨界点は極値」は一般に正しくないが次が成立する。

定理 2.22 (a,b) を関数 $z = f(x,y)$ の臨界点とする。$H(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ とおくと次が成立する。

(1) $H(a,b) > 0$ のとき $f(x,y)$ は (a,b) で極値をとる。

　1) $f_{xx}(a,b) > 0$ のとき $f(a,b)$ は極少値である。

　2) $f_{xx}(a,b) < 0$ のとき $f(a,b)$ は極大値である。

(2) $H(a,b) < 0$ のとき極値でない。

(3) $H(a,b) = 0$ のときはこれだけでは分らない。極値になる場合もならない場合もある。

例 2.23 $z = f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2y^2$ の極値を調べよう。最初に極値候補となる臨界点を求めよう。$z_x = 4x^3 + 4xy^2 = 0$, $z_y = 4y^3 + 4x^2y - 4y = 0$ の共通解が求めるものになる。この連立方程式を実数の範囲で解くと $(x,y) = (0,0), (0,1), (0,-1)$ を得る。

$z_{xx} = 12x^2 + 4y^2$, $z_{xy} = 8xy$, $z_{yy} = 12y^2 + 4x^2 - 4$ なので $H(0, \pm 1) = 32 > 0$, $H(0,0) = 0$ となる。定理 2.22 より，z は $(0, \pm 1)$ で極小である。$H(0,0) = 0$ なので $(0,0)$ の様子は定理 2.22 からは分からない。個別に調べなければならない。この場合は極値になりそうもないと当りをつけてそれを示す。

x–軸上に制限して考えると，$f(x,0) = x^4$ である。x–軸上では $(0,0)$ は極小，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より大きな値を取る点が存在する。y–軸上に制限すると $f(0,y) = y^4 - 2y^2$ でこの 4 次関数は y–軸上では $(0,0)$ で極大，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より小さい値を取る点が存在する。2 つを合わせると $(0,0)$ が極値でない事が分かる。

演習問題 2.11　次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y + 1$　　(2) $z = x^2 - 5xy + 2y^2 + x - y - 3$

(3) $z = \dfrac{ax + by}{x^2 + y^2 + 1}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$　　(4) $z = e^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2)$ $(a > b > 0)$

最大値・最小値を与える点は広義の極値になっているので，最大値・最小値を求めるとき極値問題を適用できる。次の例を考える。

辺の和が一定の直方体の中で体積最大になるものを求めよ。

3 辺の長さを x, y, z とする。和が一定なので，それを ℓ とすると，$x + y + z = \ell$ である。体積を V とすると，$V = xyz = xy(\ell - x - y)$ である。$\dfrac{\partial V}{\partial x} = y(\ell - 2x - y)$, $\dfrac{\partial V}{\partial y} = y(\ell - x - 2y)$ より，$\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0$ を連立させて解くと $x = y = \dfrac{\ell}{3}$ を得る。

この解法は一見よさそうに思われるが，良く考えてみると示しているのは『最大値が存在するならばそれは $x = y = \dfrac{\ell}{3}$ である』という事だけである。最大値の存在証明もするためには次を必要とする。

定理 2.24 有界閉集合で定義された連続関数は最大値・最小値をとる。

命題 2.25 領域 D で定義された関数が最大値をとるとき次のいずれかである。

(1) 領域の内部の点であり，そこで広義の極値をとる。

(2) 境界上の点である。

上の問題についてもう一度厳密に解答しよう。そのためには有界閉集合の問題にする必要がある。つまり直方体だけでなく「つぶれた直方体」も考える必要が出て来る。$V = xy(\ell - x - y)$ とする $(\ell > 0)$。$D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0, y \geqq 0, x + y \leqq \ell \right\}$ 上で V の最大値を求める問題を考える。D は有界閉集合で，V は連続関数なので最大値が存在する。境界上での値は $V = 0$ なので最大値は D の内部に存在する。よって広義の極値になっている。V の極値は $\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y} \right) = (0,0)$ となるが，これを解くと $x = y = \dfrac{\ell}{3}$ となるので，これが求めるもの。

演習問題 2.12

(1) 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積最大のものを求めよ。

(2) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。