2.8 陰関数

高校時代に次の様な議論をしたかもしれない。

$x^2+y^2=1$ を x で微分すると $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$ なので，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ である。

式 $x^2+y^2=1$ は明示的に関数を定義しているわけではないが，陰覆的に定義してると考える。この議論をきちんと述べよう。

定義 2.26 関数 $F(x,y)$ と $F(a,b)=0$ となる点 (a,b) に対し，a の近傍[(1)]で定義された関数 $y=f(x)$ が存在して，1) 定義されている任意の x に対し $F(x,f(x))=0$，2) $b=f(a)$，が成立する時，F は点 (a,b) の近傍で，**陰関数** $y=f(x)$ を定めるという。またこの f を (a,b) の近傍で定まる陰関数という。

3 変数関数の場合は，関数 $F(x_1,x_2,y)$ と，$F(a_1,a_2,b)=0$ となる点 (a_1,a_2,b) に対し，(a_1,a_2) の近傍[(2)]で定義された関数 $y=f(x_1,x_2)$ が存在して $F(x_1,x_2,f(x_1,x_2))=0$，$b=f(a_1,a_2)$ が成立する時，F は点 (a_1,a_2,b) において，**陰関数** $y=f(x_1,x_2)$ を定めるという。

定理 2.27 $F(x,y)$ に対し $F(a,b)=0$，$F_y(a,b)\neq 0$ ならば a の近傍で陰関数 $y=f(x)$ が存在する。この時，F が C^r 級なら f も C^r 級。$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$ である。

$F(x_1,x_2,y)$ に対し $F(a_1,a_2,b)=0$，$F_y(a_1,a_2,b)\neq 0$ ならば (a_1,a_2) の近傍で陰関数 $y=f(x_1,x_2)$ が存在する。この時，F が C^r 級なら f も C^r 級。$\dfrac{\partial y}{\partial x_1}=-\dfrac{F_{x_1}}{F_y}$，$\dfrac{\partial y}{\partial x_2}=-\dfrac{F_{x_2}}{F_y}$ である。

$F(x,y)=x^3-3xy+y^3=0$(デカルトの正葉線) 両辺を x で微分することにより

$$y'=\frac{x^2-y}{x-y^2}$$

を得る。これを更に x で微分する事により

$$y''=\frac{2xy}{(x-y^2)^3}$$

が分かる。

2 つの式 $x^2+y^2+z^2+w^2=1,\ x+y+z+w=0$ が与えられているとする。このとき 2 つの変数は残りの 2 つの変数の関数と見ることが出来る。今 z,w を x,y の関数と見て x に関して微分すれば $2x+2zz_x+2ww_x=0,\ 1+z_x+w_x=0$ が分かる。これを解くと

$$z_x=\frac{w-x}{z-w}\qquad w_x=\frac{z-x}{w-z}$$

[(1)] 近傍とはある正数 δ が存在して $\{\,x \mid |x-a|<\delta\,\}$ となる集合の事。

[(2)] この場合の近傍とはある正数 δ が存在して $\left\{\,(x,y)\ \middle|\ \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\,\right\}$ となる集合の事。

を得る。同様に y に関して実行すれば

$$z_y \frac{w-y}{z-w} \qquad w_y = \frac{z-y}{w-z}$$

を得る。

演習問題 2.13　次で与えられる陰関数に関し $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $1 - y + xe^y = 0$

(2) $x^3y^3 + y - x = 0$

2.9　条件付き極値

条件つき極値問題とは 2 変数の場合は $\varphi(x,y) = 0$ のもとでの $f(x,y)$ の極値を求める問題である。3 変数の場合は『$\varphi(x,y,z) = 0$ のもとでの $f(x,y,z)$ の極値を求める問題』または『$\varphi_1(x,y,z) = 0, \varphi_2(x,y,z) = 0$ のもとでの $f(x,y,z)$ の極値を求める問題』である。一般には $\varphi_1(x_1,\cdots,x_n) = 0, \ldots, \varphi_p(x_1,\cdots,x_n) = 0$ のもとでの $f(x_1,\ldots,x_n)$ の極値を求める。

条件付き極値は条件の無い場合に比べて一般に難しい。条件付き極値の問題をある意味で条件の無い極値問題に変えるのがラグランジュの未定乗数法（未定係数法）である。

定義 2.28 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し $\mathbf{grad}f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ とおく。一般 n 変数の関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ の場合は $\mathbf{grad}f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ とする。

定理 2.29 (ラグランジジェの未定乗数法) $\varphi(x,y), f(x,y)$ を C^1 級関数とする。$P = (x,y)$ が $\varphi(x,y) = 0$ を満たしながら変化するとする。$f(x,y)$ が点 $P = P_0$ で（広義の）極値をとるとき，
$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y)$ とおくと，$\mathbf{grad}\varphi(P_0) = \mathbf{0}$ または $\mathbf{grad}F(P_0,\lambda) = \mathbf{0}$ が成立する。

例として『$x^2 + y^2 = 1$ の条件の下で $ax + by$ の最大値最小値を求めよ。』という問題が考えられる。最大値，最小値を与える点は広義の極値になっているので,『$x^2 + y^2 = 1$ の条件の下で $ax + by$ の最極値を求めよ。』という問題を解くことで，この問題を解くことができる。

ラグランジェの未定乗数法で解いてみよう。

$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1,\ f(x,y) = ax + by,\ F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y)$ とおく。$\mathbf{grad}\varphi = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = (2x, 2y)$, $\mathbf{grad}F = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}\right) = (a - 2\lambda x, b - 2\lambda y, -x^2 - y^2 + 1)$ となるので，$\mathbf{grad}\varphi(x,y) = 0$ となる点は $(0,0)$ のみ。しかしこの点では $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -x^2 - y^2 + 1$ が 0 にならない。よって $\mathbf{grad}F = \mathbf{0}$ となる点が極値を与える。これを解いて $x = \dfrac{a}{2\lambda}$, $y = \dfrac{a}{2\lambda}$, $a^2 + b^2 = 4\lambda^2$ を得る。$f(\dfrac{a}{2\lambda}, \dfrac{b}{2\lambda}) = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ なので最大値は $\sqrt{a^2 + b^2}$ である。

3 変数の場合をとりあげよう。$\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,\ f(x,y,z) = ax + by + cz$ とする。$\varphi(x,y,z) = 0$ の条件の下で $f(x,y,z)$ の最大値・最小値を求めよう。$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda\varphi(x,y,z)$ とおく。$\mathbf{grad}\varphi = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)$, $\mathbf{grad}F = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}, \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}\right) = (a - 2\lambda x, b - 2\lambda y, c - 2\lambda z, -x^2 - y^2 - z^2 + 1)$ なので $\mathbf{grad}F = \mathbf{0}$ となる点は $(0,0,0)$ のみ。しかしこの点では $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ とならないので $\mathbf{grad}F = \mathbf{0}$ となる点が極値を与える。これを解くと

$x = \dfrac{a}{2\lambda}$, $y = \dfrac{b}{2\lambda}$, $z = \dfrac{c}{2\lambda}$, $a^2 + b^2 + c^2 = 4\lambda^2$ を得る。よって最大値は $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$，最小値は $-\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ である。

演習問題 2.14

(1) $\varphi(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で $f(x, y) = xy$ の最大値・最小値を求めよ。

(2) $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ の最大値を求めよ。

(3) [**行列の固有値を知っている事を前提とする**] $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ の下で $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qyz + 2rzx$ の最大値を求めよ。

定理 2.30 (未定乗数法の一般形) $\varphi_1(x_1, \cdots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \cdots, x_n), f(x_1, \cdots, x_n)$ を C^1 級の関数とする。$x = (x_1, \cdots, x_n)$ が $\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_m(x) = 0$ を満たしながら変化するとする。$F(x, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = f(x) - \lambda_1\varphi_1(x) - \cdots - \lambda_m\varphi_m(x)$ とおく時，$f(x)$ が（広義の）極値をとれば $\mathrm{rank}\left(\dfrac{D(\varphi)}{D(x)}\right) = \mathrm{rank}\left(\dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_n)}\right) < m$ または $\mathbf{grad}F = \mathbf{0}$ が成立する。