

3 1 変数関数の不定積分

これから積分を扱っていくが、最初に定積分と不定積分の違いに関して述べておく。高校では不定積分 (原始関数) を用いて定積分が定義されていた。これは便法と考えるべきで、厳密には正しい定義とは言えない。

不定積分は微分の逆として定義されるものであるが、定積分は求積法と関係して定義されるものであり、直接は不定積分とは無関係である。定義としては無関係の両者の関係にニュートン・ライプニッツが独立に気づいたとき微積分学が成立したといえる。この事は定積分の定義のときにもう一度ふれるが、この事をきちんと理解する事が積分の理論的把握のキーポイントである。

3.1 定義と諸性質

関数 $F(x)$ が微分可能で

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

となるとき、 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数 (primitive function) または不定積分 (indefinite integral) といい、

$$\int f(x)dx = F(x)$$

と表す。原始関数は $f(x)$ から一意に決まるものではない。しかし次の命題から定数分の差しかない事が分かる。

命題 3.1 2つの関数 $F(x)$, $G(x)$ が $F'(x) = G'(x)$ を満たせばある定数 C が存在して $G(x) = F(x) + C$ が成立する。

例えば $\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = x^2$ なので

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

となる。この C を積分定数と呼ぶが、この講義ではなければ混乱する場合を除き通常省略する。

命題 3.2 [積分の線型性]

$$(1) \int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$(2) \int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

命題 3.3 [いくつかの関数の不定積分]

$$(1) \int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} \quad (a \neq -1)$$

$$(2) \int \frac{1}{x} dx = \log |x|$$

$$(3) \int \cos x dx = \sin x$$

$$(4) \int \sin x dx = -\cos x$$

$$(5) \int e^x dx = e^x$$

$$(6) \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$$

$$(7) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$(8) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

これらの命題はすべて微分法の対応する公式を積分の言葉に直すと出てくる。例えば $\int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ を示すには、 $F(x) = \int f(x) dx$, $G(x) = \int g(x) dx$ とおくと、 $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ である。このとき $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$ より $\int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ が得られる。

$a \neq -1$ のとき $\left(\frac{1}{a+1}x^{a+1}\right)' = x^a$ なので $\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$ を得る。微分法の公式と積分法の公式を丸暗記して混乱する人もいるが、その様な人に対しては(丸暗記を推奨する分けではないが、かりに丸暗記をするとしたら)「微分法の公式だけにして、積分法は微分法から導いたほうがよい」と言っておこう。

3.2 置換積分法と部分積分法

積分の計算は微分の計算に比べ一般に難しい。計算の方法として次の2つがある。

定理 3.4 [部分積分法]

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

証明 定義より

$$\int \frac{d}{dx} f(x) dx = f(x)$$

が成立している。 $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{d}{dx}f(x)g(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$ の両辺を積分すると

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

を得る。これを移項すると定理が得られる。■

定理は移項すると

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

の形になる。実際に適応するときは、どちらを微分されたものとするかで2通り方法がある。次の例は最初は後者、次は前者の形の適応である。

$$\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

$$\int x \log x dx = \int \left(\frac{1}{2} x^2\right)' \log x dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2$$

部分積分を2回実行する必要がある次の様な形の積分もある。

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$$

また $1 = (x)'$ と考える言わば退化した形で用いられる積分もある。

$$\int \log x dx = \int (x)' \log x dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x$$

定理 3.5 [置換積分法] $x = \varphi(t)$ とすると,

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

証明 $\int f(x) dx = F(x)$ のとき $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$ である。合成関数の微分法により $\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d\varphi(t)}{dt} f(x)$ なので

$$\int f(\varphi(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} dt = F(\varphi(t)) = F(x) = \int f(x) dx$$

を得る。■

置換積分は色々な形の変数変換が考案されている。詳しくは次節で扱うがここでは幾つかの例を見ておこう。

最初に変数が1次式になっている形の積分を考える。 $I = \int \cos(2x+3) dx$ を考える。 $t = 2x+3$ と置くと、 $\frac{dt}{dx} = 2$ なので、 $dx = \frac{1}{2} dt$ である。よって

$$I = \int \cos t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t = \frac{1}{2} \sin(2x+3)$$

次に $I = \int u' f(u) dx$ という形の積分を見よう。最初に対数型 $\int \frac{u'}{u} dx$

$\int \frac{x}{1+x^2} dx$ を考える。 $t = 1+x^2$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 2x$ なので、 $dx = \frac{1}{2x} dt$ 、よって

$$I = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{t} \frac{1}{2x} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \log t = \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

対数型2番目： $\int \tan x dx$ を考える。 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ なので $u = \cos x$ とおくと、 $\frac{du}{dx} = -\sin x$ より $dx = -\frac{1}{\sin x} du$ である。よって

$$I = - \int \frac{\sin x}{u} \frac{1}{\sin x} du = - \int \frac{1}{u} du = -\log |u| = -\log |\cos x|$$

非対数型 : $I = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$ のとき。天下りではあるが, $x = a \tan t$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{(\cos t)^2}$ なので $dx = \frac{a}{(\cos t)^2} dt$ となる。 $x^2 + a^2 = a^2(\tan t)^2 + a^2 = a^2 \frac{(\sin t)^2}{(\cos t)^2} + a^2 = a^2 \frac{(\sin t)^2 + (\cos t)^2}{(\cos t)^2} = \frac{a^2}{(\cos t)^2}$ なので

$$I = \int \frac{\cos^2 t}{a^2} \frac{a}{(\cos t)^2} dt = \int \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} t = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

演習問題 3.1 次の関数の不定積分を求めよ。

- | | | | |
|---------------------------|-------------------|------------------------|------------------------|
| (1) $(2x + 5)^6$ | (2) e^{-2x} | (3) $\sin \frac{x}{2}$ | (4) $\frac{1}{x(x-1)}$ |
| (5) $\frac{x}{(1+x^2)^3}$ | (6) $\arctan x$ | (7) $\arcsin x$ | (8) $(\log x)^2$ |
| (9) $x \sin x$ | (10) $x^2 \cos x$ | | |

重要な注意 : 不定積分において計算は一般に大変であるが, 検算は簡単である。求めた関数を微分して元の被積分関数になればよい。 **必ず検算をする事 !!**