数理解析 II 要綱 #2

2002–10–14　　河野

積分の基本的な性質を確認しながら，微積分の基本定理 (定理 4.9) の証明を目指そう。積分では次の性質が基本的である。

命題 4.5　(1) [**線型性**] f, g が積分可能であるときその和・実数倍である関数も積分可能で次が成り立つ。

1) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2) $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$

(2) [**区間線型性**] 関数 f が区間 $[a,c]$, $[c,b]$ で積分可能ならば，区間 $[a,b]$ でも積分可能であり，次が成立する。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(3) [**単調性**] 関数 f, g が区間 $[a,b]$ で積分可能とする。任意の $x\in[a,b]$ に対し $f(x)\leqq g(x)$ となるとき次が成立する。

$$\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$$

(4) [**単位の値**] 値が 1 である定数関数 τ は任意の閉区間 $[a,b]$ で積分可能であり，次が成立する。

$$\int_a^b \tau(x)dx = b-a$$ (1)

いくつか注意をしておこう。「基本的」という意味はこの 4 つの性質から積分が一意的に定まる事を意味する。即ち，関数 f と区間 $[a,b]$ に対し実数を対応される対応 $J(f,[a,b])$ がこの 4 つの性質を持つとき，この J は定義 4.1 で定義した積分と一致する。

関数 f, g が積分可能であるとき，その積 fg も積分可能である。しかしその積を求める「積の積分法」(2)なるものは存在しない。これも積分の計算を複雑にしている 1 つの原因である。

略証　1 つ示してあとは演習問題に残しておく。(3) を示そう。分割 $\Delta=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ に対し $\displaystyle\Sigma_f(\Delta;\{\xi_i\})=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$，$\displaystyle\Sigma_g(\Delta;\{\xi_i\})=\sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ とおくと，任意の i について $f(\xi_i)\leqq g(\xi_i)$ が成立しているので，$\Sigma_f(\Delta;\{\xi_i\})\leqq\Sigma_g(\Delta;\{\xi_i\})$ が成立する。ここで $\|\Delta\|\to 0$ とすると両辺は収束し，極限においても不等号が成立するので，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx\leqq\int_a^b g(x)dx$ が成立する。∎

演習問題 4.1　命題 4.5 を証明せよ。**注意**：　この証明を課題に出すと微積分の基本定理を前提にした，次の様な間違った「証明」をする学生がいる。例えば (1)–1)。$F(x)$ を $f(x)$ の不定積

---

(1) 通常 $\displaystyle\int_a^b 1dx$ と書く。また 1 を略して $\displaystyle\int_a^b dx$ と書く事もある。

(2) 毎年のテストでは，存在しないはずの「積の積分法」を用いて計算するものがある程度存在する。

分，$G(x)$ を $g(x)$ の不定積分とすると，$F'(x) = f(x)$，$G'(x) = g(x)$ である。$(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$ なので，$f(x)+g(x)$ の不定積分は $F(x)+G(x)$ である。よって $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = [F(x)+G(x)]_a^b = F(b)+G(b)-F(a)-G(a) = F(b)-F(a)+G(b)-G(a) = [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ となる。

$\int_a^b f(x)dx$ において a を**下端**，b を**上端**というが $b \leqq a$ の場合にも積分を拡張しておく。
$a = b$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

$b < a$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

と定義する。拡張した意味の積分に対して前述の基本性質の (1),(2),(4) は成立する。(3) は成立しない ($b \leqq a$ のときは不等号が逆になる)。

関数の**平均値**というものを定義しよう。有限個の量の平均はそれらを足してその個数で割る事で得られる。関数の平均値はその極限と考えられる。区間 $[a,b]$ で定義された (積分可能な) 関数 f を考える。区間を n 等分して $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ とする。ここで定義 4.2 の Riemann 和で $\xi_i = x_i$ とおくと，

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} = (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

となる。両辺を $b-a$ で割って極限をとると，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

が得られる。この値を平均値という。
連続の場合平均値はある点の関数値で与えられる。

定理 4.6 [**積分の平均値の定理**] 関数 f は $[a,b]$ で連続とする。このときある c $(a < c < b)$ が存在して

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

が成立する。

証明　関数 f の最大値を M，最小値を L とする。$L \leqq f(x) \leqq M$ より

$$\int_a^b L dx \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b M dx$$

が分かる。3 辺を $b-a$ で割ると

$$L \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqq M$$

が得られる。中間値の定理からある c $(a < c < b)$ が存在して $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(c)$ が成立する。∎

c を $c = a + \theta(b-a)$ という形に書いておくと，$b > a$ の場合にも平均値の定理が成立する。そのとき勿論区間は $[b, a]$ であるが。

定理 4.7 [**積分の平均値の定理**] 連続な関数 f と a, b に対し θ $(0 < \theta < 1)$ が存在して

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(a + \theta(b-a))$$

が成立する。