

4.2 微積分の基本定理

命題 4.8 関数 f は $[a, b]$ で連続とする。 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ ⁽¹⁾⁽²⁾ とおくと $F'(x) = f(x)$ が成立する。即ち $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ は $f(x)$ の原始関数である。

証明 $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_a^{x+h} f(x)dx + \int_x^a f(x)dx = \int_x^{x+h} f(x)dx$ より、積分の平均値の定理を用いると、ある c が存在して $F(x+h) - F(x) = f(c)h$ と書ける。ここで h は x と $x+h$ の間の実数。 $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$ を得る。

定理 4.9 [微積分の基本定理] 関数 f は $[a, b]$ で連続とする。 G を f の原始関数とすると

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

が成立する。

証明 G は f の原始関数なので $G'(x) = f(x)$ 。命題 4.8 より $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ も $F'(x) = f(x)$ を満たす。 $H(x) = F(x) - G(x)$ とおくと、 $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ 、よって $H(x)$ は定数である。これを C とおくと、 $F(x) = G(x) + C$ である。これに $x = a$ を代入すると、 $F(a) = 0$ なので、 $0 = G(a) + C$ 、よって $C = -G(a)$ 。 $F(x) = G(x) - G(a)$ に $x = b$ を代入すると求める式が得られる。 ■

$G(b) - G(a)$ を $\left[G(x) \right]_a^b$ とも書く。

この定理により、連続な関数の積分計算において不定積分を用いた計算が可能になる。ここで連続というのは重要な制限であって、連続でない関数に適用してはいけない。例えば次の計算は間違いである⁽³⁾。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \left[\log |x| \right]_{-1}^1 = \log |1| - \log |-1| = \log 1 - \log 1 = 0$$

被積分関数が連続のとき不定積分の所で扱った定理を適用できる。特に積分に関して部分積分法、置換積分法を使用できる。

(1) テキストではこの形のことを不定積分と呼び、原始関数と区別している。この講義では特に区別しない事にする。

(2) 積分 dx の x と上端の値 x が同じ x で表されている事に違和感を感じる人もいるかもしれない。 dx の方の x を別の文字に変えても式の意味は変わらない。例えば $\int_a^x f(t)dt$ は元の式と同じである。

(3) テストでこのような計算をするものがある程度いる。

定理 4.10 [部分積分法] f, g が C^1 級るとき次が成立する。

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

定理 4.11 [置換積分法] f は連続, $x = \varphi(t)$ は C^1 級とする。 $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$ とすると次が成立する。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

例 4.12 部分積分法: $I = \int_0^1 x \arctan x dx$ を計算する。 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ かつ $\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$ なので,

$$I = \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \arctan x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \arctan x \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right) \frac{1}{1+x^2} dx$$

を得る。ここで

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[x \right]_0^1 - \left[\arctan x \right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

なので $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ である。

置換積分法: $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ を計算する。 $x = \sin t$ とおくと, $x: 0 \rightarrow 1$ のとき $t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ である。 $x' = \cos t$ なので

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2t + t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

を得る。