数理解析 II 要綱 #4　　2002–11–4　　河野

4.3　広義積分

積分の定義においては関数は有界であり，積分区間も有界な閉区間であった。ここではその制限をはずせる場合にはずし，積分の意味を拡張する。これらは**広義積分**と呼ばれる。

例から始めよう。関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ を $x > 0$ の部分で考える。今 1 から M まで f を積分したものを $I(M)$ とすると,

$$I(M) = \int_1^M \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^M = 1 - \frac{1}{M}$$

となる。ここで $\displaystyle\lim_{M\to\infty} I(M) = 1$ となるので，$\displaystyle\int_0^\infty f(x) = 1$ と書く事が許されるだろう。

関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ を $x > 0$ の部分で考える。今 ε から 1 まで f を積分したものを $J(\varepsilon)$ とすると,

$$J(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

となる。ここで $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} J(\varepsilon) = 2$ となるので，$\displaystyle\int_0^1 f(x) = 2$ と書く事が許されるだろう。

以上の例から次を定義する。幾つかの type がある。最後に一般的な形を扱う。

(1) 関数 f は $(a, b]$ で連続とする。$I(\varepsilon) = \displaystyle\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ とおく。$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} I(\varepsilon)$ が収束するとき

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は収束する」という。

(2) 関数 f は $[a, b)$ で連続とする。$I(\varepsilon) = \displaystyle\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ とおく。$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} I(\varepsilon)$ が収束するとき

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は収束する」という。

(3) 関数 f は $[a, \infty)$ で連続とする。$I(M) = \displaystyle\int_a^M f(x)dx$ とおく。$\displaystyle\lim_{M\to\infty} I(M)$ が収束するとき

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ は収束する」という。

(4) 関数 f は $(-\infty, b]$ で連続とする。$I(N) = \displaystyle\int_N^\infty f(x)dx$ とおく。$\displaystyle\lim_{N \to -\infty} I(M)$ が収束するとき

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{N \to -\infty} \int_N^b f(x)dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)dx$ は収束する」という。

(5) 関数 f は有限個の点 $a_1, \ldots, a_n$ を除いて (A, B) で連続とする。ただし $A = \infty$, $B = \infty$ の場合も含むとする。$n+1$ 個の点 $c_0, c_1, \ldots, c_n$ を $c_0 < a_1 < c_1 < a_2 < \cdots < a_n < c_n$ となる様にとる。次のすべての広義積分が収束するとき，広義積分 $\displaystyle\int_A^B f(x)dx$ は収束するという。

$$\int_A^{c_0} f(x)dx, \int_{c_{i-1}}^{a_i} f(x)dx \int_{a_i}^{c_i} f(x)dx, \int_{c_n}^B f(x)dx$$

広義積分の値はこれらのすべての和で定義する。即ち

$$\int_A^B f(x)dx = \int_A^{c_0} f(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{a_i} f(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{c_i} f(x)dx + \int_{c_n}^B f(x)dx$$

で定義する。

例 4.13

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$: この広義積分は (5) のタイプである。分点 c_0 として 0 を選ぶ。$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx$ が共に収束していれば値が求まる。$I(M) = \displaystyle\int_0^M \frac{1}{1+x^2}dx$ する。$x = \tan t$ とおき置換積分を行う。$0 = \arctan 0$ である。また $M' = \arctan M$ とおくと，$dx = (1+x^2)dt$ なので，$I(M) = \displaystyle\int_0^{M'} \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)dt = \int_0^{M'} dt = M'$

$M \to \infty$ のとき，$M' \to \dfrac{\pi}{2}$ となるので，

$$\lim_{M \to \infty} I(M) = \lim_{M' \to \frac{\pi}{2}} M' = \frac{\pi}{2}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx$ も同様に計算できて $\dfrac{\pi}{2}$ となる。

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi$: (1) は積分区間を見ると，広義積分である事が分かったが，この場合は被積分関数を見る必要がある。この関数は区間の両端で無限大となるので,(5) のタイプの広義積分になっている。分点を 0 とする。$x = \sin t$ と変数変換を行う。$0 = \arcsin 0$ である。$u = \arcsin(1-\varepsilon)$ とおく。$\varepsilon \to +0$ のとき $u \to \dfrac{\pi}{2}$ である。$I(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ とおくと，$I(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^u \frac{1}{\cos t}\cos t dt = u$ なので $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} I(\varepsilon) = \lim_{u \to \frac{\pi}{2}} u = \frac{\pi}{2}$

演習問題 4.2　次の広義積分が収束するときは値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x dx$　　(2) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$　　(4) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \cos x dx$

広義積分の値が分からなくても収束するかしないかを判定したい場合がある。その様なとき次の定理が有用である。

定理 4.14 N, M は実数または $\pm\infty$ とする。$N < x < M$ において $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ が成立しているとする。このとき広義積分 $\displaystyle\int_N^M g(x)dx$ が収束すれば広義積分 $\displaystyle\int_N^M f(x)dx$ も収束する。逆に広義積分 $\displaystyle\int_N^M f(x)dx$ が収束しなければ広義積分 $\displaystyle\int_N^M g(x)dx$ も収束しない。

広義積分を用いて定義される重要な関数をあげよう。$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$ は後で示すが，$p > 0$ で収束する。p を変数と見て $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$ と定義する。この関数は**ガンマ関数**と呼ばれる。この関数は $p > 0$ で定義されるが，特に p が自然数のときは $\Gamma(n+1) = n!$ という性質を持っている。

収束を示そう。$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx = \int_0^1 e^{-x}x^{p-1}dx + \int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$ と分ける。

(1) $p \geqq 1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^{p-1}dx$ は広義積分ではなく通常の積分なので問題はない。よって $0 < p < 1$ とする。$0 < x < 1$ で $0 \leqq e^{-x} \leqq 1$ なので $0 < e^{-x}x^{p-1} < x^{p-1} = \dfrac{1}{x^{1-p}}$ なので $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1-p}}dx$ が収束する事を示せばよい。$I(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^{1-p}}dx = \frac{1}{p}(1-\varepsilon^p)$ より $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} I(\varepsilon) = \frac{1}{p}$ となり収束する。

(2) $f(x) = e^{-x}x^{p-1} = \dfrac{1}{x^2}\dfrac{x^{p+1}}{e^x}$ と見る。$\dfrac{x^{p+1}}{e^x}$ は $1 \leqq x$ で連続であり $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^{p+1}}{e^x} = 0$ なので $1 \leqq x$ で有界である。即ちある正数 M が存在して $1 \leqq x$ ならば $0 < \dfrac{x^{p+1}}{e^x} \leqq M$ となる。よって $1 \leqq x$ のとき $0 \leqq e^{-x}x^{p-1} \leqq \dfrac{M}{x^2}$ が成立する。広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{M}{x^2}dx$ は収束するので広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$ も収束する。

(3) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ が成立する事を示そう。$\displaystyle\int_\varepsilon^1 e^{-x}x^p dx = [-e^{-x}x^p]_\varepsilon^1 + p\int_\varepsilon^1 e^{-x}x^{p-1}dx$ が成立するので $\varepsilon \to +0$ とすると $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^p dx = -e^{-1} + p\int_0^1 e^{-x}x^{p-1}dx$ を得る。また $\displaystyle\int_1^N e^{-x}x^p dx = [-e^{-x}x^p]_1^N + p\int_1^N e^{-x}x^{p-1}dx$ が成立するので $N \to \infty$ とすると $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}x^p dx = e^{-1} + p\int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$ を得る。これらより $\Gamma(p+1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^p dx = \int_0^1 e^{-x}x^p dx + \int_1^\infty e^{-x}x^p dx = -e^{-1} + p\int_0^1 e^{-x}x^{p-1}dx + e^{-1} + p\int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}dx = p\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx = p\Gamma(p)$ を得る。

演習問題 4.3　次の広義積分は $p > 0, q > 0$ のとき収束する事を示せ。

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

この関数は**ベータ関数**と呼ばれ $B(p,q)$ と書かれる。2 項係数の実数拡張版である。即ち次の式が成立する事が知られている。(証明に興味のあるものはテキスト p91 参照。)

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$