数理解析 II 要綱 #5　　　2002–11–11　　　河野

4.4 計量と長さ

3 つの物理量 X, Y, Z の間に $Z = Y \times X$ の関係があるとき，量 Z は一般に積分を用いて求める事ができる。

例えば (距離)=(速さ)×(時間) という関係がある。速さ v が時間 t の関数であるとする。この v を $v(t)$ と書く。時間 t_0 から時間 t_1 の間に動いた距離 ℓ は

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

で与えられる。

今量 Y が量 X の関数とする。X のパラメーターを x とし，$Y = Y(x)$ と書く。量 X が x_0 から x_1 まで変化したときの量 Z は

$$Z = \int_{x_0}^{x_1} Y(x)dx$$

で与えられる。

「(面積)=(縦)×(横)」なので，$R = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, 0 \leqq y \leqq f(x) \right\}$ の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

で与えられる。

「(体積)=(縦)×(横)×(高さ)」である。空間内の領域が R を考える。平面 $x = u$ と R の共通部分の面積を $m(u)$ とする。即ちここでは「(体積)=(面積)×(高さ)」と見ている。$x < a$ または $x > b$ のとき $m(x) = 0$ とする。R の体積 V は

$$V = \int_a^b m(x)dx$$

で与えられる。

密度が一様でない銅線を考える。「(質量)=(線密度)×(長さ)」なので長さ ℓ の銅線を考える点 x における線密度を $\mu(x)$ とするときこの銅線の質量 M は

$$M = \int_0^\ell \mu(x)dx$$

で与えられる。

ちょっと先走り：3 次元の物体 D を考える。D の点 $P = (x_1, x_2, x_3)$ における密度を $\mu(x_1, x_2, x_3)$ とする。「(質量)=(密度)×(体積)」が成立している。この物体の質量 M は

$$M = \iiint_D \mu(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3$$

で与えられる。

次に曲線の長さを求める事を考える。平面上の曲線 C がパラメータ t により $x = x(t), y = y(t)$, $(a \leqq t \leqq b)$ と表されているとする。$[a, b]$ の分割 Δ を考える。

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

$P_i = ((x(t_i), y(t_i))$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ とし折れ線 $P_0 P_1 \cdots P_n$ で曲線 C を近似する。折れ線の長さは

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(c_i)^2 + y'(d_i)^2}(t_i - t_{i-1})$$

となる。ただし c_i, d_i は $t_{i-1} \leqq c_i, d_i \leqq t_i$ となる実数である。ここで分割を細かくしていった極限を考えると，極限では

$$(\text{曲線 } C \text{ の長さ}) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

となる。