数理解析 II 要綱 #7

2003–12–2　　河野

重積分の基本性質に関して確認しておこう。きちんと証明するには $\varepsilon - \delta$ 論法が必要になるので，証明概ねは省略する。

定理 5.2 2 重積分は次の性質を持つ。ただし積分領域は面積確定，被積分関数は積分可能を仮定する。

(1) [**線型性**]

1) $\displaystyle\iint_D (f+g)dxdy = \iint_D f dxdy + \iint_D g dxdy$

2) $\displaystyle\iint_D \alpha f dxdy = \alpha \iint_D f dxdy$

(2) [**領域線型性**] 領域 D_1, D_2 に対し $m(D_1 \cap D_2) = 0$ のとき和集合 $C_1 \cup D_2$ を $D_1 + D_2$ と書く。ただし $m(X)$ は領域 X の面積とする。

$$\iint_{D_1+D_2} f dxdy = \iint_{D_1} f dxdy + \iint_{D_2} f dxdy$$

(3) [**単調性**] 任意の $(x,y) \in D$ に対し $f(x,y) \leqq g(x,y)$ となるとき

$$\iint_D f dxdy \leqq \iint_D g dxdy$$

(4) [**単位の値**] 値が 1 である定数関数 τ に対し

$$\iint_D \tau dxdy = m(D)$$

今まで面積というものが始めから存在するもののように取り扱ってきた。しかし，理論的には不正確であった。面積というのは理論的には積分を用いて定義される。すなわち，$\boldsymbol{R}^2$ の有界閉領域 D に対し，値が 1 である定数関数 τ が D 上で積分可能のとき，D は面積確定といい，その面積 $m(D)$ を

$$m(D) = \iint_D \tau(x,y) dxdy$$

で定義する。その上でこの m が，面積に関して持っているであろうと今まで想定して来た性質 (例えば加法性 ; $m(D_1 + D_2) = m(D_1) + m(D_2)$) を証明する事になる。この新しい面積の定義はいままでの素朴な定義 (長方形の面積は縦×横等) を含んでいる事が分かる。またすべての図形が面積を持つ分けではない事も (証明はかなり難しいが) 分かる。

定理 5.3 [**重積分の平均値の定理**] D は連結とする。連結とは D 内の任意の 2 点が D 内の曲線で結べることをいう。f は D で連続とする。このとき D 内にある点 $P = (x_0, y_0)$ が存在して

$$\iint_D f dxdy = f(x_0, y_0) m(D)$$

となる。

証明　D は有界閉集合なので最大値 M を与える点 (x_1, y_2) と，最小値 m を与える点 (x_2, y_2) が存在する。このとき D の任意の点 (x, y) に対し $f(x_2, y_2) \leqq f(x, y) \leqq f(x_1, y_1)$ 即ち $m \leqq f(x, y) \leqq M$ が成立している。定理 5.2 (3) の単調性と (4) を用いると $mm(D) \leqq \iint_D f dxdy \leqq Mm(D)$ が分かる。$\mu = \dfrac{\iint_D f dxdy}{m(D)}$ とおくと，$m \leqq \mu \leqq M$ である。(x_1, y_1) と (x_2, y_2) を結ぶ曲線を C とすると，平均値の定理より (x_0, y_0) で $f(x_0, y_0) = \mu$ となる C 上の点 P が存在する。

5.2　累次積分

重積分を定義に基づいて計算するのは，例の計算を思い出せば分かるように，大変である。ここでは計算する方法として「累次積分」を紹介する。累次積分を標語的にいうと「2 重積分 $=$ 1 変数積分 2 回」である。3 重積分の場合は「3 重積分 $=$ 1 変数積分 3 回」，n 重積分の場合は「n 重積分 $=$ 1 変数積分 n 回」といえる。

最初に特別な形の領域に名前をつけておこう。領域 D が次の様に表す事ができるとき**縦線型**と呼ぶ。: 実数 a, b と $[a, b]$ で定義された連続関数 $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ が存在して

$$D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \right\}$$

と書ける。領域 D が次の様に表す事ができるとき**横線型**と呼ぶ。: 実数 c, d と $[c, d]$ で定義された連続関数 $x = h_1(y)$, $x = h_2(y)$ が存在して

$$D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y) \right\}$$

と書ける。

縦線型，横線型の領域は面積確定である。ある領域が縦線型でも横線型でもあるという場合もある。例えば円は縦線型かつ横線型である。例えば $D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$ とする。$D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; -1 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2} \right\}$ となるので D は縦線型である。また $D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; -1 \leqq y \leqq 1, -\sqrt{1 - y^2} \leqq x \leqq \sqrt{1 - y^2} \right\}$ となるので横線型でもある。

定理 5.4 D は縦線型とする。即ち $D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \right\}$ とする。$f(x, y)$ は D で定義された連続関数とする。このとき D における f の積分 (重積分) に対し次が成立する。

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

また D が横線型のとき，即ち $D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y) \right\}$ と書けるとき重積分に対し次が成立する。

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dx \right\} dy$$

定理の 2 つの式の左辺は重積分，右辺は 1 変数積分を 2 回している事に注意。重積分を 1 変数関数の積分 2 回 (累次積分) に正しく直す事ができる様になる事がここのポイントである。領域が長方形の場合次の様に簡単になる。

系 5.5 D を長方形領域，即ち $D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \right\}$ とする。このとき次が成立する。

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy$$

例をいくつか計算してみよう。最初に $I = \displaystyle\iint_D x^2 ydxdy$ $(D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0, y \geqq 0, x+y \leqq 1 \right\})$ を考える。ここで略記法を 1 つ入れておく。$D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0, y \geqq 0, x+y \leqq 1 \right\}$ の様な集合がよく出てくるのでこれを $\{x \geqq 0, y \geqq 0, x+y \leqq 1\}$ と略記することにする。D は縦線型とも横線型とも見る事ができるので 2 通りの計算を実行しよう。**注意**：重積分の計算のときは積分領域を**必ず図示する事**!! 縦線型と見ると $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1-x$ となるので，

$$I = \iint_D x^2 ydxdy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} x^2 ydy \right\} dx$$

という累次積分の形にできる。後は 1 変数の積分を実行すればよい。実行すると

$$I = \int_0^1 \left\{ \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=0}^{1-x} \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} x^2 (1-x)^2 \right\} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ x^2 - 2x^3 + x^4 \right\} dx = \frac{1}{60}$$

となる。このとき注意することが 1 つある。変数が 2 つあるため，定積分の計算の代入のとき，間違った変数に代入する事がある。そのために $\left[\dfrac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=0}^{1-x}$ という記号を採用した。

D を横線型と見做して同様の計算ができる。$0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq x \leqq 1-y$ なので，

$$I = \iint_D x^2 ydxdy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-y} x^2 ydx \right\} dy$$

となり，

$$I = \int_0^1 \left\{ \left[\frac{1}{3} x^3 y \right]_{x=0}^{1-y} \right\} dy = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{3} (1-y)^3 y \right\} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 \left\{ y - 3y^2 + 3y^3 - y^4 \right\} dy = \frac{1}{60}$$

を得る。

2 重積分を累次積分で計算するとき，領域が縦線型かつ横線型であれば，x と y のどちらを先に積算してもよい。しかし計算の複雑さが大きく変わる場合がある。x を先に計算して複雑になってしょうがないときは，y を先に計算してみるのも 1 つの方法である。