数理解析 I 演習問題解説 #2

河野

解説の仕方が不十分で理解しづらい等の意見があればお寄せ下さい。できれば具体的に指摘していただいた方がありがたいです。改良できる範囲で改良して行きます。イントロでも言ったように，そのものズバリの解答は書きません。しかし実際書きはじめてみるとこれはなかなか難しいものです。

演習問題 0.1　例 0.2 の (3),(4),(6) を示せ。

演習問題 0.2　次が正しい事を示せ。ただし，T は常に正しい命題，F は常に偽である命題とする。

(1) $P \wedge T \equiv P$, $P \vee T \equiv T$

(2) $P \wedge F \equiv F$, $P \vee F \equiv P$

(3) $P \vee P \equiv P$, $P \wedge P \equiv P$　(ベキ等律)

(4) $P \wedge \neg P \equiv F$　(矛盾率)

(5) $P \vee \neg P \equiv T$　(排中律)

(6) $P \vee Q \equiv Q \vee P$, $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$　(交換法則)

(7) $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$, $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$　(結合法則)

(8) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$, $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$　(分配法則)

(9) $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$, $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$　(吸収法則)

この 2 つの問題について解説を加える必要はないでしょう。解き方の分からない人は真理表の所を見直して下さい。真理表を書いてすべての欄が一致している命題は同値なので真理表をきちんと書けば出来上がりです。

演習問題 0.3　スイッチが 3 つある場合を考える。

(1) 3 つの命題 P, Q, R に対し前述のような命題 (P, Q, R の真偽が変わるとその命題の真偽が変わるような命題) を 1 つ作れ。(**Hint:** 2 個の場合に作った命題を利用せよ。)

(2) それに基づいて回路を設計せよ。

(1) スイッチが 2 つの場合と同様に P, Q, R のそれぞれについて真偽が変化したとき，命題の真偽が変化するという条件を考えてみます。あとは，例えば P, Q, R がすべて真のとき命題の真偽を決める事で命題が満たすべき真理表は決まります。あとはその真理表を持つ様な命題を構成する事です。これは Hint にある様に 2 個の場合の命題を利用して作ってもよいし，直接作る方法もあります。真理表を見ながら考えれば思い付くと思うのですが…。
(2) これは (1) ができればルーチンワークだと思います。「$\wedge$」には直列を,「$\vee$」には並列を,「$\neg$」にはそれを否定する回路を対応させ，全体を完成させて下さい。同値な回路でも，(1) の命題に何を選ぶかでずいぶん変わります。余力のある人は (1) の命題を 2 種類構成して，それから回路を設計したときどれぐらい違いが出るかを見てみて下さい。

演習問題 0.4　すべての自然数 n と各 $i (i = 1, \ldots, n)$ について「他の $P_j (j \neq i)$ を固定して P_i の値だけを変化させた時 $F_n(P_1, \ldots, P_n)$ の値も変化する。」様な命題 F_n を構成せよ ($P_1, \ldots, P_n$ は命題)。

これは少し骨が折れるかもしれません。$n=2,3$ と演習，前問でやってきたので，$n=4$ の場合を考えて一般化を試みるというのも 1 つの方法かもしれません。ここでは最初に帰納的方法を紹介します。$n-1$ 個の場合条件を満たす命題 $F_{n-1}(P_1,\dots,P_{n-1})$ はすでに得られているとします。この F_{n-1} と P_n から $F_n(P_1,\dots,P_n)$ を条件を満たすように作ればよい分けです。2 個のときこの条件を満たす命題は (色々ありますが例えば) $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))$ があります。P として F_{n-1}，Q として P_n を採用すると，求める命題が得られます。

ここからしばらく小文字です。興味のある人はお読み下さい。もう 1 つの方法は直接命題を構成する方法です。ここでは一般化して $P_1,\dots,P_n$ に関するある真理表が与えられているとき，それを実現する命題を P_i と $\wedge,\vee\neg$ から作ってみましょう。いきなりの一般論は苦しいかもしれないので例を見ながら。下のような真理表に対応する命題を作る事を考えます。つまり X の所入る $P,Q,R,$ と $\wedge,\vee\neg$ から作られる命題を見つけたい。

P	Q	R	X
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	T	F
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	T

X の各欄で T になっている欄に注目する。具体的には 1 行目は X が真になっている。その欄の P,Q,R の真偽の組合せを考える。今の場合，T,T,T となっている。その組合せのときのみ真になる様な命題を G_1 とする。今の場合 $G_1=P\wedge Q\wedge R$ を選ぶ。次に 3 行目に注目する。今の場合，F,T,T となっている。その組合せのときのみ真になる様な命題を G_2 とする。今の場合 $G_2=\neg P\wedge Q\wedge R$ を選ぶ。次に 8 行目に注目する。今の場合，F,F,F となっている。その組合せのときのみ真になる様な命題を G_3 とする。今の場合 $G_3=\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$ を選ぶ。このとき $G_1\vee G_2\vee G_3$ は与えられた条件を満たしている事が分かる。よって $X=G_1\vee G_2\vee G_3$ とすればよい。

この方法は 3 個という条件に依存しない。n 個の場合の真理表が与えられたとする。上から真になる欄を探す。1 番目に真になる欄に対応する $P_1,\dots,P_n$ の真偽が分かる。その組合せのときのみ真になる命題を G_1 とする。以下 2 番目，3 番目と行っていく。一番最後の欄は m 番目とすると，$G_1,\dots,G_m$ が決まる。このとき $G_1\vee G_2\vee\cdots\vee G_m$ が求めるものになる。

演習問題 0.5　『$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$』の否定命題を作れ。また『$\lim_{n\to\infty} a_n=a$』の否定命題を作れ。

任意と存在のついた命題の否定に関する形式的な議論で示すか，意味を考えて示すか，考え方は 1 つではないがいずれにせよ,「任意」と「存在」を用いて命題をきちんと書き直す事が議論の出発点になる。この命題は書き直しをしなくてもすでに前に出ている。前者は『任意の正の実数 ε に対しある正の実数 δ が存在して任意の実数 x に対し $|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成立する。』事であり，後者は『任意の正の実数 ε に対しある自然数 N が存在して任意の自然数 n に対し $n>N$ ならば $|a_n-a|<\varepsilon$ が成立する。』であった。前者に関し「存在 $\to$ 任意」「任意 $\to$ 存在」の形式的議論を行うと,『あるの正の実数 ε が存在して任意の正の実数 δ に対しある実数 x が存在して「$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$」が成立しない。』となる。「鈎括弧」内部を書き直すのは各自に任せます。後者も同様に試みて下さい。

演習問題 0.6　I で定義された関数 $y=f(x)$ を考える。$y=f(x)$ が $x=a$ で連続とは『$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$』と定義される。$y=f(x)$ が I で連続である (単に $y=f(x)$ は連続関数ともいう) とは，I

のすべての点 a で『$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$』が成立する事と定義される。次の命題を「任意・存在」を用いてきちんと書き直せ。

(1) $y = f(x)$ が連続関数である。

(2) $y = f(x)$ が連続関数でない。

(3) 閉区間 I で定義された連続関数 $y = f(x)$ は最大値をとる (最大値定理)。

(4) 区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 $y = f(x)$ が $f(a) < 0 < f(b)$ を満たせば $f(c) = 0$ となる点 c $(a < c < b)$ が存在する (中間値の定理)。

(1) 「連続関数」は「任意の点で連続な関数」なので分かると思います。任意がもう 1 つ加わるだけですネ。

(2) (1) を否定すればよいので，前問を用いればできるかな? 以下 (3)，(4) は各自考えて下さい。