数理解析 I 演習問題解説 #4

河野

演習問題 1.1　次の関数 $f(x)$ は連続かどうか調べよ。

(1) $y = \dfrac{1}{x}$

(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が無理数または } 0) \\ \dfrac{1}{q} & (x \text{ が } 0 \text{ 以外の有理数で } x = p/q \text{ のとき，ただし } p \text{ と } q \text{ は互いに素な整数で } q > 0) \end{cases}$

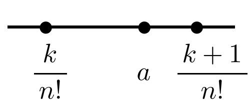
(1) はわざと曖昧な言い方をしました。定義域を確定しておかなくては連続かどうかは確定しない事実に注意するためです。f が I で連続 (単に f 連続であるという) とは「任意の $a \in I$ に対し $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成立する」事なので，この事実をチェックすればいいわけです。I を $\boldsymbol{R}$ と考えるか，$\boldsymbol{R} - \{0\}$ と考えるかで結果が違ってきます。

(2) は「奇妙な」関数ですので，どの様に定義されているかを先ず理解して下さい。連続性に関して結論を述べると「f は 0 と無理数において連続，0 以外の有理数で不連続」となります。この様な奇妙な関数に対しては「$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$」を示そうとするとき，直観に頼ったやり方ではうまく行かず，所謂 ε–δ 論法が必要になります。以下証明を述べますが，**興味のある人だけ**読んで下さい。

「$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$」を ε–δ 論法で書くと「任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，任意の x について $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成立する」である。

最初にこの命題を $a = 0$ の場合に示す。x が 0 または無理数のときは $f(x) = 0$ なので $|f(x)| = 0 \leqq |x|$ が成立する。x が 0 以外の有理数のとき $x = \dfrac{p}{q}$ とおくと (ただし p と q は互いに素な整数で $q > 0$)，$f(x) = \dfrac{1}{q}$ なので $|f(x)| = \dfrac{1}{q} \leqq \dfrac{|p|}{q} = \left|\dfrac{p}{q}\right| = |x|$ となる。以上により「任意の x に対し $|f(x)| \leqq |x|$ が成立する」事が分かる。任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta = \varepsilon$ とおくと x が $|x-a| = |x-0| = |x| < \delta$ を満たしているとき，$|f(x)-f(a)| = |f(x)-f(0)| = |f(x)| \leqq |x| < \delta = \varepsilon$ となる。

次に a を無理数とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対し $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ となる自然数 n を 1 つ固定する。$\dfrac{i}{n!}$ の形の有理数を考える。ここで $n!$ は n の階乗で i はすべての整数を動くとする。$\dfrac{i}{n!}$ のなかに a と



一致するものはないので (a は無理数)，a に最も近い 2 つを $\dfrac{k}{n!}, \dfrac{k+1}{n!}$ とする。ここで a と $\dfrac{k}{n!}, \dfrac{k+1}{n!}$ の距離の小さい方を δ とする，即ち $\delta = \min\left\{\dfrac{k+1}{n!} - a, a - \dfrac{k}{n!}\right\}$ とおく。$|x - a| < \delta$ を満たす x に対し (1) x が 0 または無理数のとき，(2) x が有理数のときの 2 つの場合に分ける。(1) の場合 $f(x) = 0$ なので $|f(x) - f(a)| = 0 - 0 = 0 < \varepsilon$ となり成立している。(2) の場合 $x = \dfrac{p}{q}$ とおくと (ただし p と q は互いに素な整数で $q > 0$)，$q \geqq n$ が従う。何故なら $q < n$ とすると q は $n!$ の約数なので $\dfrac{p}{q} = \dfrac{j}{n!}$ の形をしているはずである。この形の有理数で最も a に近いのが $\dfrac{k}{n!}$ または

$\dfrac{k+1}{n!}$ なので，$\dfrac{j}{n!}-a$ が δ より小さくなることはない。これは矛盾なので $q \geqq n$ である。よって $f(x)=f(\dfrac{p}{q})=\dfrac{1}{q}$ である。このとき $|f(x)-f(a)|=|f(x)|=\dfrac{1}{q} \leqq \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ となる。

最後に a が 0 以外の有理数のとき a で連続ではない事を示す。「a で連続」の否定を正確に述べる事から始める。「$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$」を ε–δ 論法で書くと「任意の $\varepsilon>0$ に対しある $\delta>0$ が存在して，任意の x について $0<|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成立する」であった。この否定命題は「論理」の所で扱った。否定命題は「ある $\varepsilon>0$ が存在して任意の $\delta>0$ に対しある x が存在して $0<|x-a|<\delta$ かつ $|f(x)-f(a)| \geqq \varepsilon$ が成立する」である。$a=\dfrac{p}{q}$ (ただし p と q は互いに素な整数で $q>0$) とする。ε を見つけなければいけないが，我々は $\varepsilon=\dfrac{1}{q}$ としよう。$\varepsilon>0$ の条件は満たしている。任意の $\delta>0$ に対し条件を満たす x を見つけなければいけないが，次の事実の成立は認めよう。

「任意の実数 a に対しその幾らでも近くに無理数 b が存在する」

この事実をもう少し正確に書くと「任意の実数 a と任意の正数 $\delta>0$ に対し $|b-a|<\delta$ を満たす無理数 b が存在する」である。さて δ に対し $|x-a|<\delta$ を満たす無理数 x は存在する。このとき $|f(x)-f(a)|=|0-\dfrac{1}{q}|=\dfrac{1}{q} \geqq \varepsilon$ なので x は条件を満たすものである。

以上で証明は終りだが 2 つ程付け足し。1 つ目は ε–δ 論法についてだが，途中の議論でいきなり $n!$ が出て来たり，$\varepsilon=\dfrac{1}{q}$ と置いたりしている。これは予備的計算をすでに行っていて，そう置くとうまく行くのが分かって，論理展開の上では天下りにそう置いている。ε–δ 論法の分かりにくさは「任意・存在」の扱いに関わる点もあるが，予備的計算から出てくる天下りの議論にもある。だから ε–δ 論法を理解しようと考えるとき，テキストの議論等を読むだけでなく，実際の問題にトライして予備的計算を自分で実際にやってみる必要がある。

2 つ目：仮定した事実を証明しておこう。任意の実数 a と任意の正数 $\delta>0$ に対し $n>\dfrac{\sqrt{2}}{\delta}$ となる自然数 n を 1 つ固定する。$\dfrac{\sqrt{2}i}{n}$ の形の数全体を考える。ただし i は整数を動く。この中で a に一番近い数を $\dfrac{\sqrt{2}k}{n}$ とすると，$|\dfrac{\sqrt{2}k}{n}-a| \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ である。$b=\dfrac{\sqrt{2}k}{n}$ とおくと b は無理数で $|b-a| \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{n} < \delta$ を満たしている。