数理解析 I 演習問題解説 #5

河野

演習問題 1.2　テキストを参考にして，定理 1.15, 1.16, 1.17 を証明せよ。

最初は 1.15 です。これは導関数の定義に従って計算すれば出て来ます。ここでは (1) のみ示します。関数 $y = f(x)$ の導関数は $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ で与えられるので，$f+g$ の導関数は $(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$ で与えられます。$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ なので極限の中の式は $\dfrac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$ となります。よって $(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$ となります。

次は定理 1.16 合成関数の微分法です。$y = f(x)$, $z = g(y)$ とすると合成関数 $g \circ f$ は $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ で定義されました。z を x で微分する ($g \circ f$ を x で微分する事です) と $\dfrac{dz}{dx} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$ となります。極限の中の式を

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と変形して $k = f(x+h) - f(x)$ とおくと $h \to 0$ のとき $k \to 0$ である。$y = f(x)$ とおくと $f(x+h) = y + k$ となるので

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(y+k) - g(y)}{k} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\} = \lim_{k\to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

となり定理が得られる。

注意：この証明には 1 つ不十分な点がある。それを発見せよ。

定理 1.17 は定理 1.16 において $z = g(y)$ を $y = f(x)$ の逆関数に取ります。そうすれば，$z = x$ という事実から証明されます。

演習問題 1.3　次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(1) $y = x^3$　　(2) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

(3) $y = \cos x$　　(4) $y = \log x$

この問題と次の問題の違いに注意して下さい。「定義に基づいて」とあると使えるのは導関数の定義のみです。(それに加えてこの問題の場合許可されている 2 つの式のみです。) 次の問題の場合は，問中にも書いてありますが，知られている (自分が知っている) 諸公式をすべて用いてもかまいません。

ここには (4) のアウトラインのみ書きます。$y' = \lim_{h \to 0} \dfrac{\log(x+h) - \log x}{h}$ ですが，使える式は指数関数に関する式のみなので，対数関数の式を指数関数の式に書き直す必要があります。$k = \log(x+h) - \log x$ とおくと，$\log(x+h) = \log x + k$ となります。ここで両辺を e の肩に乗せると，$x + h = e^{\log x + k}$ となります。あとは整理して $h = \cdots$ を求め元の式に代入すると k と k の指数関数の式になります。$h \to 0$ のとき $k \to 0$ なので...

演習問題 1.4　次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

(1) $y = xe^x$　(2) $y = \sin^{100} 2x$

(3) $y = x^3 \log(2x^3 + x)$　(4) $y = \arcsin(x^2 + 1)$

(5) $y = x^x$

導関数の計算では個々の関数の導関数に加えて，積の導関数，合成関数の導関数が使えるようになればほとんど OK です。ここでは (1)(5) に出てくる x^x の微分のみを扱います。これは両方が変化するので，冪乗関数でもないし指数関数でもありません。そこで両辺の対数をとり，それを x で微分します。(この方法には**対数微分**という名前がついている様です。) $y = x^x$ の対数を取ると $\log y = x \log x$ となります。$\dfrac{d \log y}{dx} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{d \log y}{dy}$ なので左辺は $\dfrac{dy}{dx}\dfrac{1}{y}$ となります。右辺は積の微分法を用いると $\log x + x\dfrac{1}{x} = \log x + 1$ となるので，$\dfrac{dy}{dx}\dfrac{1}{y} = \log x + 1$ となり，払うと導関数が求まります。