数理解析 I 演習問題解説 #7

河野

演習問題 1.7　近似の度合の最もよい 3 次式を求めよ。ただし 3 次式 $y = a + bh + ch^2 + dh^3$ が近似の度合が最もよいとは $f(x+h) - (a + bh + ch^2 + dh^3) = \varepsilon h^3$ と置いたとき $\lim_{h\to 0} \varepsilon = 0$ が成立する事をいう。

近似の度合の最もよい 4 次式を求めよ。ただし 4 次式 $y = a + bh + ch^2 + dh^3 + eh^4$ が近似の度合が最もよいとは $f(x+h) - (a + bh + ch^2 + dh^3 + eh^4) = \varepsilon h^4$ と置いたとき $\lim_{h\to 0} \varepsilon = 0$ が成立する事をいう。

2 次式の場合と同じように計算して行きます。3 次式の場合のみ書くと，$f(x+h) = a + bh + ch^2 + dh^3 + \varepsilon h^3$ において $\varepsilon \to 0$ とすると，$a = f(x)$ が得られます。次に $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = b + ch + dh^2 + \varepsilon h^2$ と変形して $\varepsilon \to 0$ とすると $f'(x) = b$ が得られます。$\dfrac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h^2} = c + dh + \varepsilon h$ として $\varepsilon \to 0$ とします。右辺の極限は c になります。左辺の極限はロピタルの定理を用いると $\dfrac{f''(x)}{2}$ となります。ここまでは 2 次式の場合とほとんど同じです。最後は $\dfrac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \dfrac{f''(x)}{2}h^2}{h^3} = d + \varepsilon$ となるので，$\varepsilon \to 0$ とすると右辺は d 左辺は…。後は各自計算して下さい。

演習問題 1.8　次の関数の $x = 0$ におけるテーラー級数を求めよ。

(1) $f(x) = \log(1+x)$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(3) $f(x) = \sqrt{1+x}$　　(4) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$x = a$ におけるテーラー展開を求めるためには関数 $f(x)$ に対して，$f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ を求めればよい。この問題はすべて $a = 0$ となっている。

(1) は $f(x) = \log x$ なので 1 回微分すると $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ となります。$f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$ となるので，一般の n に対しては $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ が予想されます。きちんと証明するには数学的帰納法等を用いると証明できます。あとは $x = 0$ を代入すれば係数が決まるので求まります。

(2) に関連して**収束半径**について述べておきます。(2) を解くと (学生は実際に計算して求めて下さい)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

となります。この式の左辺は $x \neq 1$ のとききちんと定義されています。しかし右辺はそうではありません。$x = 1$ を代入すると $1 + 1 + 1 + \cdots$ となって収束しません。実はこの等号は $|x| < 1$ のとき成立して，それ以外の場合は成立しません。この様に級数の場合，ある範囲では収束し，それ以外で収束しない事があります。そこで一般に次を定義します。級数

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

に対し，次の性質を持つ実数 r を級数 $f(x)$ の**収束半径**といいます。

(1) $|x-a|<r$ のとき級数 $f(x)$ は収束する。

(2) $|x-a|>r$ のとき級数 $f(x)$ は収束しない。

ただし任意の x に関して級数 $f(x)$ が収束するとき収束半径は ∞ とします。この定義に基づくと $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ の収束半径は 1 になります。(証明して下さい)

テーラー級数を求めるのに n 次導関数を求めるのは通常の方法ですが，導関数を求めなくもと級数自身が求まる場合もあります。例えば (2) の級数は求まっているとして，(4) の級数を求めてみましょう。

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

の x の部分を $-x$ で置き換えても式は成立するはずです。よって

$$\frac{1}{1+x}=1+(-x)+(-x)^2+\cdots+(-x)^n+\cdots=1-x+x^2+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots$$

となります。

(1) から (4) を出します。

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$$

でしたこの両辺を x で微分します。左辺は $\dfrac{1}{1+x}$ となります。右辺は項別に微分できると仮定すると (ここでは証明しませんがこの仮定は正しい)，$1-x+x^2+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots$ となり，この方法でも (4) が得られます。

演習問題 1.9　次の関数を $x=a$ でテーラー (級数) 展開せよ。

(1) $f(x)=x^5 \quad (a=1)$　　(2) $f(x)=e^x \quad (a=1)$

(3) $f(x)=\sin x \quad (a=\pi)$　　(4) $f(x)=\log x \quad (a=1)$

この問題について解説はもう不要でしょう。n 次導関数がどうなるかを求めて a を代入すれば出て来ます。