数理解析 I 演習問題解説 #8

河野

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

演習問題 2.1　上の関数が原点において連続でない事を示せ。また原点における偏導関数を求めよ

関数 $z = f(x,y)$ が (a,b) において連続というのは $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ が成立する事でした。今の場合 $(a,b) = (0,0)$ $f(0,0) = 0$ なので $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ が成立すれば原点において連続になります。この極限は例ですでに取り上げたようにそうはならないので連続ではありません。偏導関数は定義にしたがって計算すればいいわけです。例えば x に関する偏導関数の原点における値は $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$ を計算すれば出て来ます。y に関しても同様にできます。この関数は原点において偏微分可能だが連続でない例になっています。

演習問題 2.2　演習問題 2.1 の関数は原点で全微分可能でない事を示せ。

定義 2.9 にしたがって $\varepsilon(h,k)$ を計算し，それが $h \to 0, k \to 0$ としたとき 0 に収束すれば全微分可能で，しなければそうでない。例えば $k=0$ として極限を取った場合と，$h=k$ として極限を取った場合を比較してみてください。

演習問題 2.3　次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $z = x^3 - 3xy + y^3$	(2) $z = (x^3+y^4)^{100}$
(3) $z = \dfrac{x-y}{2x+3y}$	(4) $z = \sqrt{x^2+y^2}$
(5) $e^{ax^2+by^2}$	(6) $z = x \arctan \dfrac{x}{y}$
(7) $z = xy \sin(x^2+y^2)$	(8) $z = x^2y^2 \log(x^3+y^3)$
(9) $z = xy \arcsin \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$	(10) $z = x^x y^y x^y y^x$

この問題は解説の必要はないでしょう。偏微分の問題に見えるかもしれませんが，実質的には 1 変数関数の微分の問題です。この問題ができない人は 1 変数関数の微分を復習して下さい。