数理解析 I 演習問題解説 #9

河野

演習問題 2.4　次の関数に対し $\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $z = f(x, y) = x + y^2, x + y = s, xy = t$

(2) $z = f(x, y) = x + y, x^2 + y^2 = s, x^2 y^2 = t$

講義のときにも言いましたが，変数が増えてくると，どの変数が組になっているかを押さえておく事が大切です。明示的に書いていない場合もあるので注意して判断して下さい。この問題では x と y，s と t が組です。$\dfrac{\partial x}{\partial s}$ 等を求めるのに，講義ではヤコビ行列を用いる方法を説明したので，ここでは別の方法を紹介します。2 つも方法があると混乱するという人は**読まないで**下さい。

(1) x, y と s, t の間の関係を与える式が 2 つあります。この式 $x + y = s$ と $xy = t$ を s で微分すると $\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial y}{\partial s} = 1 (= \dfrac{\partial s}{\partial s})$ と $\dfrac{\partial x}{\partial s} y + x \dfrac{\partial y}{\partial s} = 0 (= \dfrac{\partial t}{\partial s})$ が分る。これを $\dfrac{\partial x}{\partial s}$ と $\dfrac{\partial y}{\partial s}$ に関する連結方程式と見て解くと $\dfrac{\partial x}{\partial s} = \dfrac{x}{x - y}$，$\dfrac{\partial y}{\partial s} = -\dfrac{y}{x - y}$ を得る。また与式を t で微分する事により $\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial y}{\partial t} = 0 (= \dfrac{\partial s}{\partial t})$ と $\dfrac{\partial x}{\partial t} y + x \dfrac{\partial y}{\partial t} = 1 (= \dfrac{\partial t}{\partial 1})$ を得る。これを解くと $\dfrac{\partial x}{\partial t} = \dfrac{x - 1}{x - y}$，$\dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{1 - x}{x - y}$ が分る。後は講義のとき説明した方法と同じく合成関数の微分法を用いるとできる。

(2) この方法は講義で説明していないので，(2) も解説しておきましょう。今度は式は $x^2 + y^2 = s$ と $x^2 y^2 = t$ です。両辺を s で微分すると $2x \dfrac{\partial x}{\partial s} + 2y \dfrac{\partial y}{\partial s} = 1 (= \dfrac{\partial s}{\partial s})$ と $2x \dfrac{\partial x}{\partial s} y^2 + x^2 2y \dfrac{\partial y}{\partial s} = 0 (= \dfrac{\partial t}{\partial s})$ を得ます。これを解くと $\dfrac{\partial x}{\partial s} = \dfrac{x^2}{2x(x^2 - y^2)}$，$\dfrac{\partial y}{\partial s} = \dfrac{y^2}{2y(y^2 - x^2)}$ が分る。また t で微分する事により $2x \dfrac{\partial x}{\partial t} + 2y \dfrac{\partial y}{\partial t} = 0 (= \dfrac{\partial s}{\partial t})$ と $2xy^2 \dfrac{\partial x}{\partial t} + 2x^2 y \dfrac{\partial y}{\partial t} = 1 (= \dfrac{\partial t}{\partial t})$ が分る。後は (1) と同様。

演習問題 2.5

(1) $x = u \cos\alpha - v \sin\alpha$, $y = u \sin\alpha + v \sin\alpha$ (α は定数) のとき次を示せ。

1) $z_x^2 + z_y^2 = z_u^2 + z_v^2$

2) $z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv}$

(2) $x + y = e^{u+v}$, $x - y = e^{u-v}$ に対し $z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} - z_{vv})$ が成立することを示せ。

(3) $x + y = u$, $y = uv$ ならば $x z_{xx} + y z_{xy} + z_x = u z_{uu} - v z_{uv} + z_u$ となる事を示せ。

合成関数の微分法が分かっていればできると思います。(1) のみ示しましょう。x を u で微分すると $x_u = \cos\alpha$，v で微分すると $x_v = -\sin\alpha$ を得る。同様に $y_u = \sin\alpha$, $y_v = \cos\alpha$ が分かる。合成関数の微分法より $z_u = z_x x_u + z_y y_u$，$z_v = z_x x_v + z_y y_v$ が分かる。これを用いて $z_u^2 + z_v^2$ を計算すると $z_u^2 + z_v^2 = (z_x \cos\alpha - z_y \sin\alpha)^2 + (z_x \sin\alpha + z_y \cos\alpha)^2 = z_x^2 \cos^2\alpha - 2 z_x z_y \cos\alpha \sin\alpha + z_y^2 \sin^2\alpha + z_x^2 + 2 z_x z_y \sin\alpha \cos\alpha + z_y^2 \cos^2\alpha = z_x^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + z_y^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = z_x^2 + z_y^2$ が分かる。

$z_u = z_x x_u + z_y y_u$ を u で微分すると，席の微分法より $(z_u)_u = (z_x)_u x_u + z_x (x_u)_u + (z_y)_u y_u + z_y (y_u)_u$ となる。x_u, y_u は定数なので $(x_u)_u = 0, (y_u)_u = 0$ である。また $(z_x)_u, (z_y)_u$ に合成関数の微分法をもう一度適用すると，$(z_x)_u = (z_x)_x x_u + (z_x)_y y_u, (z_y)_u = (z_y)_x x_u + (z_y)_y y_u$ となる。よってこれらを前式に代入すると $z_{uu} = z_{xx} x_u^2 + 2 z_{xy} x_u y_u + z_{yy} y_u^2 = z_{xx} \cos^2\alpha + 2 z_{xy} \cos\alpha \sin\alpha +$

$z_{yy}\sin^2\alpha$ を得る。ただし計算途中で $z_{xy} = z_{yx}$ を使用した。同様に z_{vv} を計算すると $z_{vv} = z_{xx}\sin^2\alpha - 2z_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + z_{yy}\cos^2\alpha$ を得, これらを加えると $z_{uu}+z_{vv} = z_{xx}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+z_{yy}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) = z_{xx}+z_{yy}$ となる。

演習問題 2.6　$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする (2 次元の極座標表示)。関数 $z = f(x,y)$ に対し次を示せ。

(1) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ。

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$

この問題は前問と同様にできるので特に解説しません。でも極座標変換は大切なので一度は自分で計算をしてみてください。極座標変換でのヤコビアンには積分の変数変換のとき必ず**出会います**。出会いたくない人も多いかもしれませんが…。

演習問題 2.7　次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $w = f(x,y,z) = x^2y^3z^4$

(2) $w = xyz\sin(x^2+y^2+z^2)$

(3) $e^{x^2+y^3+z^4}$

(4) $x^2y^3\log(x^2+y^3+z^4)$

これも偏微分の問題に見えますが，実質的には 1 変数関数の微分の問題です。

演習問題 2.8　次の関数に対し $\dfrac{\partial w}{\partial s}, \dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s\partial t}$ を求めよ。

(1) $w == x+y^2+z^3$,$x+y+z = s, xy+yz+zx = t, xyz = u$

(2) $w = x+y+z$,$x^2+y^2+z^2 = s, xy^2z = t, xy+yz+zx = u$

この問題も演習問題 2.4 の解説の所で説明した方法で解いてみましょう。2 つも方法があると混乱する人はやはり**読まないで下さい**。$x+y+z = s$ を s で微分すると $x_s+y_s+z_s = 1$ です。t で微分すると $x_t+y_t+z_t = 0$ です。u で微分すると $x_u+y_u+z_u = 0$ です。$xy+yz+zx = t$ を s で微分すると $x_sy+xy_s+y_sz+yz_s+z_sx+zx_s = 0$，$t$ で微分すると $x_ty+xy_t+y_tz+yz_t+z_tx+zx_t = 1$，$u$ で微分すると $x_uy+xy_u+y_uz+yz_u+z_ux+zx_u = 0$ です。$xyz = u$ を s で微分すると $x_syz+xy_sz+xyz_s = 0$，t で微分すると $x_tyz+xy_tz+xyz_t = 0$，u で微分すると $x_uyz+xy_uz+xyz_u = 1$ です。

次の 3 つの式を x_s, y_s, z_s を未知数とする連立方程式とみて x_s, y_s, z_s について解くと解がえられます。式は ; $x_s+y_s+z_s = 1, (y+z)x_s+(z+x)y_s+(x+y)z_s = 0, yzx_s+xzy_s+xyz_s = 0$ の 3 式です。以下 t についてと u について同様に解くとえられます。得られた結果を $w_s = w_xx_s+w_yy_s+w_zz_s$ 等に代入すると導関数が求まります。(2) は省略します。

演習問題 2.9　$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ とする (3 次元の極座標表示)。関数 $w = f(x,y,z)$ に対し次を示せ。

(1) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ を計算せよ。

(2) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$

(3) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial w}{\partial\varphi}$

合成関数の微分法の問題です。$\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial w}{\partial y},\dfrac{\partial w}{\partial z}$ と $\dfrac{\partial w}{\partial r},\dfrac{\partial w}{\partial\theta},\dfrac{\partial w}{\partial\varphi}$ の間の関係式を導いて，あとは代入しての計算です。