数理解析 I 演習問題解説 #10

河野

演習問題 2.10 次の関数を (a,b) において $n=3$ としたテーラー展開を求めよ。

(1) $z=f(x,y)=(x-1)(y+2) \quad (a,b)=(0,0)$

(2) $z=f(x,y)=\dfrac{1}{1-2x+3y} \quad (a,b)=(0,0)$

(3) $z=f(x,y)=\sin(x+y) \quad (a,b)=(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$

この問題は実質的には導関数，2 次導関数，3 次導関数の計算問題です。多変数版テーラーの定理の内容が分かっていれば，導関数を計算してそこに代入すれば出来上がりです。この段階で導関数の計算ができない人は余りいないと思いますが，もしできなければ**緊急事態**です。その部分の復習を確実に。テーラーの定理は見掛けが複雑ですが $n=2,3$ と n が小さい場合に書き下すと，それ程ではないと思うので，分からない人は書き下してみて下さい。

演習問題 2.11 次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z=x^2-xy+y^2-2x+3y+1$

(2) $z=x^2-5xy+2y^2+x-y-3$

(3) $z=\dfrac{ax+by}{x^2+y^2+1}$ $(a\neq 0, b\neq 0)$

(4) $z=e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)$ $(a>b>0)$

極値問題に関してもう一度解説しておくと，$z=f(x,y)$ の極値を求めるには，
(1) 臨界点を求める。これは $\mathbf{grad}$ の記号を使って述べれば $\mathbf{grad}f=\mathbf{0}$ の点です。

臨界点はあくまでも**極値を与える点の候補**ですから，それが実際に極値になっているかどうか調べる必要があります。
(2) 臨界点におけるヘッシャンの値を計算します。値が 0 でなければ極値かどうかの判定ができます。
(3) ヘッシャンが 0 のときはこれだけでは判断できません。その問題ごと判断をする必要があります。次のいずれかになるかアタリをつけて証明します。1) (a,b) の周りの (x,y) について $f(x,y)>f(a,b)$ が成立する。この場合は極少， 2) (a,b) の周りの (x,y) について $f(x,y)<f(a,b)$ が成立する。この場合は極大，3) (a,b) のいくらでも近くに $f(x_1,y_1)>f(a.b)$, $f(x_2,y_2)<f(a,b)$ となる点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ が存在する。この場合は極値でない。

(4) のみ示しましょう。最初に (1) 臨界点を求める。$z_x=-2xe^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+2axe^{-(x^2+y^2)}$, $z_y=-2ye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+2bye^{-(x^2+y^2)}$ なので $z_x=2xe^{-(x^2+y^2)}(a-(ax^2+by^2))=0$ より $x=0$ または $ax^2+by^2=a$ となる。$z_y=2ye^{-(x^2+y^2)}(b-(ax^2+by^2))=0$ より $y=0$ または $ax^2+by^2=b$ となる。よって (a) $x=0$ かつ $y=0$，または (b) $x=0$ かつ $ax^2+by^2=b$，または (c) $ax^2+by^2=a$ かつ $y=0$，または (d) $ax^2+by^2=a$ かつ $ax^2+by^2=b$ の 4 つの場合となるが (d) は起こり得ない。よって $(x,y)=(0,0)$ または $(x,y)=(0,\pm1)$ または $(x,y)=(\pm1,0)$ となる。

(2) ヘッシャンを計算する。

$$
\begin{aligned}
z_{xx} &= -2e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+4x^2e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)-8ax^2e^{-(x^2+y^2)}+2ae^{-(x^2+y^2)}\\
z_{xy} &= 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)-4axye^{-(x^2+y^2)}-4bxye^{-(x^2+y^2)}\\
z_{yy} &= -2e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+4y^2e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)-8by^2e^{-(x^2+y^2)}+2be^{-(x^2+y^2)}
\end{aligned}
$$

$z_{xx}(0,0) = 2a > 0,\ z_{xy}(0,0) = 0,\ z_{yy}(0,0) = 2b > 0$ なので $H(0,0) = 4ab > 0$ である。$z_{xx}(0,\pm1) = 2e^{-1}(a-b) > 0,\ z_{xy}(0,\pm1) = 0,\ z_{yy}(0,\pm1) = -4be^{-1} < 0$ なので $H(0,\pm1) = -8e^{-2}(a-b)b < 0$ である。$z_{xx}(\pm1,0) = -4ae^{-1} > 0, z_{xy}(\pm1,0) = 0, z_{yy}(\pm1,0) = 2e^{-1}(b-a) < 0$ なので $H(\pm1,0) = -8e^{-2}(b-a)b > 0$ である。よって $(x,y) = (0,0), (\pm1,0)$ で極値をとる。この問題の場合 (3) の段階は必要ない。

演習問題 2.12

(1) 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積最大のものを求めよ。

(2) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。

(1) は講義中説明したので (2) を解説します。定円に内接する 3 角形をどのような変数を用いて表すかという事が最初問題になります。なるべく計算しやすい変数を選んだ方がいいのですが，最初からその様なものが分る人はよくできる人なのでしょうから，考えすぎてもしょうがないでしょう。

ここでは中心から見た各頂点のなす角を選びましょう。円の半径を $a > 0$ として 3 つの角を θ, φ, ψ とすると，$\theta > 0, \varphi > 0, \psi > 0$ かつ $\theta + \varphi + \psi = 2\pi$ を満たしている。3 角形の面積は $S = \dfrac{1}{2}a^2\sin\theta + \dfrac{1}{2}a^2\sin\varphi + \dfrac{1}{2}a^2\sin\psi$ となる。変数として θ, φ を採用すると定義域は $D = \{\,(\theta,\varphi)\,|\ \ \theta > 0, \varphi > 0, \theta + \varphi < 2\pi\}$ となる。D 上で関数 $S(\theta,\varphi) = \dfrac{1}{2}a^2\sin\theta + \dfrac{1}{2}a^2\sin\varphi + \dfrac{1}{2}a^2\sin(2\pi - \theta - \varphi)$ の最大値を求めればよい。しかし講義中も説明したが，この設定では最大値の存在を保証できない。そこで $\overline{D} = D \cup \partial D = \{\,(\theta,\varphi)\,|\ \ \theta \geqq 0, \varphi \geqq 0, \theta + \varphi \leqq 2\pi\}$ 上で $S(\theta,\varphi)$ の最大値問題を考える。

$\overline{D}$ は有界閉集合なので連続関数 $S(\theta,\varphi)$ は $\overline{D}$ 上で最大値をとる。最大値を与える点は境界上の点か極大値である。(θ,φ) が境界上の点なら $S(\theta,\varphi) = 0$ である。次に極値候補を調べるため臨界点を求める。$\dfrac{\partial S}{\partial\theta} = \dfrac{1}{2}a^2\cos\theta - \dfrac{1}{2}a^2\cos(2\pi - \theta - \varphi),\ \dfrac{\partial S}{\partial\varphi} = \dfrac{1}{2}a^2\cos\varphi - \dfrac{1}{2}a^2\cos(2\pi - \theta - \varphi)$ なので $\dfrac{\partial S}{\partial\theta} = 0, \dfrac{\partial S}{\partial\varphi} = 0$ を解くと $\cos\theta = cos\varphi$ より $\theta = \varphi$ または $\theta = 2\pi - \varphi$ が分る。$\theta = 2\pi - \varphi$ は境界上の点なのですでに考慮している。よって $\theta = \varphi$ を与式に代入すると，$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$ より $\cos\theta = 1, -\dfrac{1}{2}$ を得る。$\cos\theta = 1$ のとき $\theta = 0$ または 2π である。$\theta = 2\pi$ のときは $\varphi = 2\pi$ となるので $\overline{D}$ に入らない。$(\theta,\varphi) = (0,0)$ は境界上の点なのですでに考慮している。$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ のとき $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ または $\dfrac{4\pi}{3}$ である。$\theta = \dfrac{4\pi}{3}$ のときは $\varphi = \dfrac{4\pi}{3}$ となるので $\overline{D}$ に入らない。よって極値を与える点の候補として $(\theta,\varphi) = \left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ を得る。境界上の値と比較する事によりこの点が最大値を与える。$\theta = \varphi = \psi = \dfrac{2\pi}{3}$ 即ち正 3 角形のとき最大である。