数理解析 I 演習問題解説 #11

河野

演習問題 2.13　次で与えられる陰関数に関し $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $1 - y + xe^y = 0$

(2) $x^3y^3 + y - x = 0$

この問題も特に解説は必要ないでしょう。両辺を x で微分すると導関数が得られます。更に微分すると 2 次導関数が得られます。

演習問題 2.14

(1) $\varphi(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で $f(x, y) = xy$ の最大値・最小値を求めよ。

(2) $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ の最大値を求めよ。

(3) [**行列の固有値を知っている事を前提とする**] $\varphi(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$ の下で $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qyz + 2rzx$ の最大値を求めよ。

講義のとき (2) の説明をしましたが**計算間違い**をしました。ここで訂正をしておきましょう。行列の固有値，固有ベクトルというものを知っているとこの問題は見通しよく解けます。最初にそれを使った解法を述べ，次に使わない解法を述べます。

$(2, 2)$ 行列について少し解説をしましょう。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とスカラー λ が存在して $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となるとき λ を A の**固有値**といい，$\boldsymbol{x}$ を λ に属する A の**固有ベクトル**といいます。A の固有値 λ は**固有方程式** $\det(A-tE) = t^2-(a+d)t+(ad-bc) = 0$ の解になっている事も知られています。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とします。$f(x, y)$ は $(x\ \ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となっているので，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が固有値 λ に属する A の固有ベクトルのとき，$(x\ \ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\ \ y)\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda(x\ \ y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\lambda(x^2 + y^2))$ となっています。

以上の事を頭において解いて行きましょう。$S = \{(x, y) \mid\ \varphi(x, y) = 0\}$ は有界なので，S の範囲で連続関数 $f(x, y)$ には最大値が存在します。最大値をあたえる (x, y) は $\varphi(x, y) = 0$ という条件の元での $f(x, y)$ の極値を与える (x, y) になっているので，条件付き極値問題として考えます。$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y)$ とおき条件なしの極値問題に変換してやります。$\mathbf{grad}\varphi = \mathbf{0}$ となる x, y は $x = 0, y = 0$ でこれは S 上にないので $\mathbf{grad}F = \mathbf{0}$ となる (x, y, λ) を考えます。$F_x = 2ax + 2by - 2\lambda x = 0$, $F_y = 2bx + 2cy - 2\lambda y = 0$, $F_\lambda = -(x^2 + y^2 - 1) = 0$ なので極値を与える (x, y, λ) に対し $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が成立しています。即ち λ は $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値で，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は λ に属する A の固有ベクトルになっています。よって固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

に対しては $f(x,y)=\lambda$ となっています。λ は固有方程式 $t^2-(a+c)t+ac-b^2=0$ の解なので，この 2 つ解の大きい方が最大値を与えます。即ち最大値は $\dfrac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$ となります。固有ベクトルを具体的に求めなくても最大値が求まっているので計算が楽になっています。

とはいっても固有値などはよく分らないという人もいると思うので，**使わない方法**も解説しておきましょう。$F_x=2ax+2by-2\lambda x=0$, $F_y=2bx+2cy-2\lambda y=0$, $F_\lambda=-(x^2+y^2-1)=0$ を得る所までは前と同じです。

$b=0$ かどうかで場合分けしましょう。

(A) $b=0$ のとき。このときは導関数の値を調べてもできますが，元の関数も簡単な形になるのでそれを見ましょう。$f(x,y)=ax^2+cy^2$ です。今 $a\geqq c$ のときは，$f(x,y)=(a-c)x^2+c(x^2+y^2)$ となるので S 上では $f(x,y)=(a-c)x^2+c$ となります。S 上では $-1\leqq x\leqq 1$ なので $f(x,y)$ は $x=\pm1$(このとき $y=0$) で最大値 a を取ります。$a<c$ のときは $f(x,y)=a(x^2+y^2)+(c-a)y^2$ とできるので，$f(x,y)$ は $y=\pm1$(このとき $x=0$) で最大値 c を取ります。よってこのときの最大値は $\max\{a,c\}$ となります。

(B) $b\neq 0$ のとき。$y=\dfrac{\lambda-a}{b}x$, $x=\dfrac{\lambda-c}{b}y$ より $x=\dfrac{\lambda-c}{b}\dfrac{\lambda-a}{b}x$ となるが，$x=0$ なら $y=0$ となり $x^2+y^2=1$ に矛盾するので $x\neq 0$ である。よって $\dfrac{\lambda-c}{b}\dfrac{\lambda-a}{b}=1$ 即ち $\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0$ となる。このとき $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=(ax^2+bxy)+(bxy+cy^2)=(ax+by)x+(bx+cy)y=\lambda x^2+\lambda y^2=\lambda(x^2+y^2)=\lambda$ となる。よって 2 次方程式の解の大きい方が最大値を与えるので最大値は $\dfrac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$ となります。この式は (A) の場合も含んでいます。

(3) は $(3,3)$ 行列の固有値を知っていれば同様にできます。一般に (n,n) 行列 A に対しスカラー λ と $\mathbf{0}$ でない n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ となるとき，λ を A の**固有値**，$\boldsymbol{x}$ を λ に属する A の**固有ベクトル**と言います。固有値 λ は**固有方程式** $\varphi_A(t)=\det(A-tE)=0$ の解になっている事が知られています。ここで det は**行列式**を表す。以上の事を知っていれば同様にできます。線形解析で行列式をならったら解いてみて下さい。