数理解析 I 補充問題

2003–6–25　　河野

講義のとき配布した要綱の演習問題に対する補充問題です。「補充」の名の通り先に演習問題を一通り解いてから考えてください。

演習問題 0.1　ある学生が次の様な発言をしている。その発言が論理的に正しいか論ぜよ。「K 先生は『数理解析 I は勉強しないと合格しない』と言った。だから私は必死になって勉強した。しかし不合格だった。K 先生は嘘を言った。」

演習問題 0.2　ある学生が次の様な発言をしている。この発言の否定文を作れ。「日曜日には CD を聞きながら洗濯するか歌いながら食事の仕度をしている。」ただし,「『日曜に…している。』事はない。」の形の解答は不可。

演習問題 0.3　I で定義された関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で連続とは「任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，任意の $x \in I$ に対し $|x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成立する」事と定義される。「$y = f(x)$ が $x = a$ で連続でない」という命題をきちんと書け。

演習問題 1.1　次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(1) $y = e^{3x+1}$　(2) $y = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

(3) $y = \sin(2x+1)$　(4) $y = \log_a x$

演習問題 1.2　次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

(1) $y = xe^{2x^3+x}$　(2) $y = \cos^{100}(2x^2+x)$

(3) $y = \sin x \log(2x^3+x)$　(4) $y = \arctan(x^2+1)$

(5) $y = x^{2x}$

演習問題 2.1　次の関数に対し $\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $z = f(x,y) = xy^2$,$x + y = s, xy = t$

(2) $z = f(x,y) = x^2y$,$x^2 + y^2 = s, x^2y^2 = t$

演習問題 2.2　次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z = f(x,y) = x^3 - xy + y^2$　(2) $z = f(x,y) = x^4 + y^4 + a(x+y)^2$

(3) $z = f(x,y) = xy(x^2+y^2-1)$　(4) $z = f(x,y) = xy + \dfrac{a}{x} + \dfrac{a}{x}$ $(a > 0)$

演習問題 2.3

(1) 辺の和が一定の長方形の中で面積最大のものを求めよ。

(2) x, y, z が正で和が一定のとき，x^3y^2z が最大になる場合を求めよ。

演習問題 2.4　$x^2 + xy + y^2 = 1$ のとき，y を x の関数と見て極値を求めよ。

演習問題 2.5　底辺が長さ x, y の長方形で高さ z のマスがある。表面積 $xy + 2(xz + yz) = a$ が一定という条件の元で体積 $V = xyz$ を最大にするには x, y, z をどのようにに選べばよいか。