数理解析 I 問題解説 #4

河野

演習問題 1.1　次の関数 $f(x)$ は連続かどうか調べよ。

(1) $y = f(x) = x^2 + ax + b$

(2) $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$

(3) $y = f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が無理数または } 0) \\ \dfrac{1}{q} & (x \text{ が } 0 \text{ 以外の有理数で } x = p/q \text{ のとき，ただし } p \text{ と } q \text{ は互いに素な整数で } q > 0) \end{cases}$

(2) は講義で説明したように定義域を確定させなければ連続かどうかは確定しません。ここでは定義域は $\boldsymbol{R}^* = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq 0\}$ として考えて下さい。(3) は極限の厳密な定義に基づかなければできないので，解説しておきます。他は各自考えて下さい。(3) の様な議論は全員が理解すべきという想定はしていません。興味のある人は ε–δ 論法に基づく議論の雰囲気を味わってみて下さい。

最初に結論を書いておく。f は

(1) 0 **で連続**

(2) 0 **以外の有理数で不連続**

(3) **無理数で連続**

である。

(1)：(1) の証明は ε–δ を直接用いなくてもできる。$f(x)$ は x が無理数のときは $f(x) = 0$, $x = 0$ のときは $f(x) = 0$, x が 0 以外の有理数のときは $x = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \boldsymbol{Z}, q \in \boldsymbol{N}, p, q$ は互いに素即ち最大公約数が 1) とするとき $f(x) = \dfrac{1}{q}$ であったので，$|f(x)| \leqq |x|$ が成立している。即ち $-|x| \leqq f(x) \leqq |x|$ が成立している。$x \to 0$ のとき $|x| \to 0$ かつ $-|x| \to 0$ なので, はさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ が分かる。よって f は $x = 0$ で連続である。

(2)：a は 0 以外の有理数とする。ここでの証明には次の事実を用いる。

　有理数の幾らでも近くに無理数が存在する。

これは正確に書くと次の様になる。

　任意の正数 δ に対しある無理数 α で $|\alpha - a| < \delta$ を満たすものが存在する。

この証明は最後に述べるとして，ここではそれを仮定して議論を進める。「f が a で連続」をきちんと書くと

　任意の正数 ε に対し，ある正数 δ が存在して，任意の x に対し，$|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成立する。

であった。連続でないはこの否定だから

　ある正数 ε が存在して，任意の正数 δ に対し，ある x が存在して，$|x - a| < \delta$ かつ $|f(x) - f(a)| \geqq \varepsilon$ が成立する。

という事実を証明すればよい。

a は有理数なので，$a = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \boldsymbol{Z}, q \in \boldsymbol{N}, p, q$ は互いに素) とする。このとき $f(a) = \dfrac{1}{q}$ である。$\varepsilon = \dfrac{1}{q}$ とおく。任意の正数 δ に対し前に述べたことから，無理数 x で $|x - a| < \delta$ となるものが存在する。このとき $f(x) = 0$ なので，$|f(x) - f(a)| = |0 - \dfrac{1}{q}| = \dfrac{1}{q} \geqq \varepsilon$ となり，f が a で不連続である事が示される。

(3)：a を無理数とする。各自然数 n に対し $\alpha_n = \min\left\{ \left| \dfrac{i}{n} - a \right| \;\middle|\; i \in \boldsymbol{Z} \right\}$ とおくと，$\alpha_n \leqq \dfrac{1}{n}$ が成立している。また $\beta_n = \min\{\alpha_m \mid m = 1, 2, \ldots, n\}$ とおく。任意の正数 ε に対し $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ となる自然数 n が存在するので，1 つ固定する[1]。このとき $\delta = \beta_n$ とする。任意の x に対し，x が無理数のときは $f(x) = 0$ なので $|f(x) - f(a)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$ となり成立している。x が有理数のときは $x = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \boldsymbol{Z}, q \in \boldsymbol{N}, p, q$ は互いに素) とする。x は $|x - a| < \delta (= \beta_n)$ を満たしているとする。$q \leqq n$ と仮定すると $|x - a| \geqq \alpha_q \geqq \beta_n = \delta$ となり矛盾するので，$q > n$ となっている。このとき $|f(x) - f(a)| = \left| \dfrac{1}{q} - 0 \right| = \dfrac{1}{q} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ となり証明が終る。

残しておいた

任意の正数 δ に対しある無理数 α で $|\alpha - a| < \delta$ を満たすものが存在する。

を証明しよう。次の事実を実数の**アルキメデス性**という。

任意の正数 α, β に対し，ある自然数 n が存在して，$\alpha n > \beta$ となる。

この性質は実数の連続性より従うが，ここでは成立を仮定しておこう (「塵も積もれば山となる」原理)。δ を任意の正数とする。$\sqrt{2}$ と δ に上のアルキメデス性を適用すると，ある自然数 n で $\sqrt{2} < n\delta$ となるものが存在する。$\left\{ \sqrt{2}\dfrac{i}{n} \;\middle|\; i \in \boldsymbol{Z} \right\}$ という集合を考える。この集合にアルキメデス性を適用する事によりある整数 k が存在して $\sqrt{2}\dfrac{k-1}{n} < a < \sqrt{2}\dfrac{k}{n}$ となる。このとき $\alpha = \sqrt{2}\dfrac{k}{n}$ とおくと α は無理数であり $|\alpha - a| < \left| \alpha - \sqrt{2}\dfrac{k-1}{n} \right| = \left| \sqrt{2}\dfrac{k}{n} - \sqrt{2}\dfrac{k-1}{n} \right| = \sqrt{2}\dfrac{1}{n} < \delta$ となり証明が終る。

---

[1] 後ろのアルキメデス性も参照のこと