数理解析 I 問題解説 #5

河野

演習問題 1.2　テキストを参考にして，定理 1.15, 1.16, 1.17 を証明せよ。

定理 1.15 は微分法で特徴的な (3) のみ示す。$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)$ と変形すると

$$
\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

次は定理 1.16。$k = f(x+h) - f(x)$ とおくと，$h \to 0$ のとき $k \to 0$ となる。

$$
\begin{aligned}
(g \circ f(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{g \circ f(x+h) - g \circ f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{k} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} \\
&= \lim_{k\to 0} \left\{ \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k} \right\} \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} \\
&= g'(f(x))f'(x)
\end{aligned}
$$

となる。

この証明には 1 つ不十分な点がある。それを指摘して証明を完成させるのを意欲のあるものに対する追加の演習問題とする。

定理 1.17 は f と f の逆関数 f^{-1} に対し定理 1.16 の合成関数の微分法を適用すると出てくる。それを実際に遂行するのを追加演習問題とする。

演習問題 1.3　次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$
\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1
$$

(1) $y = x^3$　　(2) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

(3) $y = \cos x$　　(4) $y = \log x$

(3) のみ示しておこう。$\dfrac{\cos h - 1}{h} = \dfrac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \dfrac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)}$ という関係を使用する。

$$
(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\cos x\cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}\right\} \\
&= \cos x \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} - \sin x \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x \lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{\cos h + 1}\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} - \sin x \\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

演習問題 1.4　次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

(1) $y = xe^x$　　(2) $y = \sin^{100} 2x$

(3) $y = x^3 \log(2x^3 + x)$　　(4) $y = \arcsin(x^2 + 1)$

(5) $y = x^x$

講義中に何度も言ったが，合成関数の微分法と積の微分法が使えれば難しいところはない。(2) を示しておこう。

$u = 2x$,$v = \sin u$ とおくと，$x \to u$,$u \to v$,$v \to y$ と 3 段階の合成関数と見る事ができるので

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} = 100v^{99}\cos u \cdot 2 = 200\sin^{99} 2x \cos 2x
$$

となる。