数理解析 I 問題解説 #6

河野

演習問題 1.5　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\quad(a,b>0)$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\log(x^2+1)-\log x^2\right)$

$\dfrac{0}{0}$ の形をしている不定形はロピタルの定理を適用すればできると思われるので，一見その形をしていない問題を考える。(5) 及び (6) がその形をしていない。(5) は講義で説明したので (ヒント: $\displaystyle\lim_{x\to a}\log(X)=\log(\lim_{x\to a}X)$)，ここでは (6) を解説する。$\log x$ については対数法則 $\log x+\log y=\log xy$ 及びこれから従う $-\log x=\log\dfrac{1}{x}$ という性質があった。[対数法則は対数関数が指数関数の逆関数であるという事実と指数関数の指数法則とから従う。] それを用いると $\log(x^2+1)-\log x^2=\log(x^2+1)+\log\dfrac{1}{x^2}=\log\dfrac{x^2+1}{x^2}$ と変形できるので，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\log(x^2+1)-\log x^2\right) &= \lim_{x\to+\infty}\log\frac{x^2+1}{x^2}=\log\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}\right)\\ &= \log\left(\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x^2}\right)=\log 1=0\end{aligned}$$

演習問題 1.6　次の関数の概形を書け。

(1) $y=x^{-x^2}$　　(2) $y=xe^{-x^2}$

(3) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$　　(4) $y=x\log x\quad(x>0)$

(5) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$　　(6) $y=e^{-x}\sin x$

このタイプの問題には高校時代から慣れ親しんでいるだろう。ここでは (4) のグラフの概形を描こう。$y=f(x)=x\log x$ とすると，$f'(x)=\log x+x\dfrac{1}{x}=\log x+1$ である。更に微分すると $f''(x)=\dfrac{1}{x}$ なので $x>0$ で $f''(x)>0$ である。このグラフは下に凸である事が分かる。

$f'(x)=\log x+1=0$ となるのは $\log x=-1$ 即ち $\log\dfrac{1}{x}=1=\log e$ より $\dfrac{1}{x}=e$ となり $x=\dfrac{1}{e}$ を得る。増減表を書くと

x		$\frac{1}{e}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

となる。しかしこれではまだ $x\to\infty, x\to+0$ とした状況が分からない。それを調べると $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=$

∞ はすぐ分かる。また $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} x = 0$

となるのでグラフの概形は次の様になっている。