数理解析I問題解説 #7

河野

演習問題 1.7　近似の度合の最もよい 3 次式を求めよ。ただし 3 次式 $y = a + bh + ch^2 + dh^3$ が近似の度合が最もよいとは $f(x+h) - (a + bh + ch^2 + dh^3) = \varepsilon h^3$ と置いたとき $\lim_{h\to 0} \varepsilon = 0$ が成立する事をいう。

近似の度合の最もよい 4 次式を求めよ。ただし 4 次式 $y = a + bh + ch^2 + dh^3 + eh^4$ が近似の度合が最もよいとは $f(x+h) - (a + bh + ch^2 + dh^3 + eh^4) = \varepsilon h^4$ と置いたとき $\lim_{h\to 0} \varepsilon = 0$ が成立する事をいう。

2 次式の場合と同じように計算して行く。3 次式の場合は各自にまかせるとして，ここでは 4 次式の場合を考える。$f(x+h) = a + bh + ch^2 + dh^3 + eh^4 + \varepsilon h^4$ において $\varepsilon \to 0$ とすると，$a = f(x)$ が得られる。次に $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = b + ch + dh^2 + eh^3 + \varepsilon h^3$ と変形して $\varepsilon \to 0$ とすると $f'(x) = b$ が得られる。$\dfrac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h^2} = c + dh + eh^2 + \varepsilon h^2$ として $\varepsilon \to 0$ とします。右辺の極限は c になる。左辺の極限はロピタルの定理を 2 回用いると $\dfrac{f''(x)}{2}$ となる。ここまでは 2 次式の場合とほとんど同じ。次は $\dfrac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \dfrac{f''(x)}{2}h^2}{h^3} = d + eh + \varepsilon h$ となるので，$\varepsilon \to 0$ とすると右辺は d 左辺はロピタルの定理を 3 回用いて $\dfrac{f^{(3)}(x)}{3!}$ となる。最後は $\dfrac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \dfrac{f''(x)}{2}h^2 - \dfrac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3}{h^4} = e + \varepsilon$ となる。ここで $\varepsilon \to 0$ とすると，右辺は e 左辺は $\dfrac{f^{(4)}(x)}{4!}$ となる。よって求める近似式は

$$f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4$$

となる。

演習問題 1.8　次の関数の $x = 0$ におけるテーラー級数を求めよ。

(1) $f(x) = \log(1+x)$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(3) $f(x) = \sqrt{1+x}$　　(4) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$x = a$ におけるテーラー展開を求めるためには関数 $f(x)$ に対して，$f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ を求めればよい。この問題はすべて $a = 0$ となっている。

任意の n について n 階の導関数 $f^{(n)}(x)$ が分かれば $f^{(n)}(a)$ (今の場合 $f^{(n)}(0)$) は分かるりテーラー級数が求まるが，ここでは $f^{(n)}(x)$ ではなく直接 $f^{(n)}(0)$ を求める方法を考える。(2) を考える。$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ より $f(x)(1-x) = 1$ となる。両辺を微分すると $f'(x)(1-x) - f(x) = 0$ 即ち

$f'(x)(1-x) = f(x)$ を得る。この式の両辺を x で微分すると $f''(x)(1-x) - f'(x) = f'(x)$ 即ち $f''(x)(1-x) = 2f'(x)$ を得る。以下同様にして (きちんと議論するには数学的帰納法) $f^{(n)}(x)(1-x) = nf^{(n-1)}(x)$ を得る。この式に $x = 0$ を代入すると $f^{(n)}(0) = nf^{(n-1)}(0)$ が分かる。$f(0) = 1$ なので $f^{(n)}(0) = n!$ となる (きちんと示すにはやはり数学的帰納法)。よって

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

となる。この問題の場合わざわざ $f^{(n)}(0)$ のみ求めなくても，$f^{(n)}(x)$ が求まりますが，難しい問題になると $f^{(n)}(0)$ しか求めにくいとい事もありますので紹介しました。

(2) に関連して**収束半径**について述べておきます。(2) は

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

でした。この式の左辺は $x \neq 1$ のとききちんと定義されています。しかし右辺はそうではありません。$x = 1$ を代入すると $1 + 1 + 1 + \cdots$ となって収束しませんし，$|x| > 1$ となる x を代入しても同様です。実はこの等号は $|x| < 1$ のとき成立して，それ以外の場合は成立しません。この様に級数の場合，ある範囲では収束し，それ以外で収束しない事があります。そこで一般に次を定義します。級数

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

に対し，次の性質を持つ実数 r を級数 $f(x)$ の**収束半径**といいます。
(1) $|x-a| < r$ のとき級数 $f(x)$ は収束する。
(2) $|x-a| > r$ のとき級数 $f(x)$ は収束しない。
ただし任意の x に関して級数 $f(x)$ が収束するとき収束半径は ∞ とします。この定義に基づくと $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ の収束半径は 1 になります。(証明して下さい)

最後にもう 1 つ。テーラー級数を求めるのに n 次導関数を求めるのは通常の方法ですが，導関数を求めなくもと級数自身が求まる場合もあります。例えば (2) の級数は求まっているとして，(4) の級数を求めてみましょう。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

の x の部分を $-x$ で置き換えても式は成立するはずです。よって

$$\frac{1}{1+x} = 1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n + \cdots = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

となります。
(1) から (4) を出します。

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

でしたこの両辺を x で微分します。左辺は $\dfrac{1}{1+x}$ となります。右辺は項別に微分できると仮定すると (ここでは証明しませんがこの仮定は正しい)，$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$ となり，この方法でも (4) が得られます。逆に積分を用いると，(4) から (1) を出す事ができます。

演習問題 1.9　次の関数を $x = a$ でテーラー (級数) 展開せよ。

(1) $f(x) = x^5 \quad (a = 1)$　　(2) $f(x) = e^x \quad (a = 1)$

(3) $f(x) = \sin x \quad (a = \pi)$　　(4) $f(x) = \log x \quad (a = 1)$

この問題について解説はもう不要でしょう。n 次導関数がどうなるかを求めて a を代入すれば出て来ます。1 つだけやりましょう。(2) を。$f'(x) = e^x$ なので任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(x) = e^x$ となる。よって $f^{(n)}(1) = e$ である。よって求める級数は

$$f(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \cdots \frac{e}{n!}(x-1)^n + \cdots$$

となる。