数理解析 I 問題解説 #8

河野

演習問題 2.1　上の関数が原点において連続でない事を示せ。また原点における偏導関数を求めよ

講義ですでにやっていますが大事なのでもう一度書いておきます。

関数 $z = f(x,y)$ が (a,b) において連続というのは $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ が成立する事である。今の場合 $(a,b) = (0,0)$ で $f(0,0) = 0$ なので $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ が成立すれば原点において連続になる。この極限は近付き方によらず同じ値に収束する事を意味していた。点が x 軸上を動きながら原点に近付くとき極限は $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) = 0$ であり，直線 $y = x$ 上を動きながら原点に近付くときは $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x) = \dfrac{1}{2}$ なので収束しない。よって原点で連続ではない。

偏導関数は定義にしたがって計算すればよい。例えば x に関する偏導関数の原点における値は $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$ を計算すれば出て来る。y に関しても同様にできる。この関数は原点において偏微分可能だが連続でない例になっている。

演習問題 2.2　演習問題 2.1 の関数は原点で全微分可能でない事を示せ。

定義に基づいて直接計算する方法と，定理を使う方法と 2 つが考えられる。両方紹介しておく。最初は次の命題を使う。

命題：$z = f(x,y)$ が (a,b) で (全) 微分可能なら (a,b) で連続である。

与えれたら関数 $z = f(x,y)$ が $(0,0)$ で (全) 微分可能であるとする。命題より $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続となるが，すでに演習問題 2.1 で示したように $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない。矛盾が生じたので，(全) 微分可能の仮定が正しくなかった事になる。よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で (全) 微分可能でない。

次に定義に基づいて直接計算してみよう。

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおくと $\varepsilon(h,k) = \dfrac{\dfrac{hk}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$ となる。例えば $h = k$ 上を $(h,k) \to (0,0)$ とすると，$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,h) = \lim_{h\to 0} \dfrac{h^2}{2h^2\sqrt{2h^2}} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{2\sqrt{2}|h|} = \infty$ となり収束しない。よって $(0,0)$ で (全) 微分可能ではない。

演習問題 2.3　次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $z = x^3 - 3xy + y^3$

(2) $z = (x^3 + y^4)^{100}$

(3) $z = \dfrac{x-y}{2x+3y}$

(4) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

(5) $e^{ax^2+by^2}$

(6) $z = x \arctan \dfrac{x}{y}$

(7) $z = xy \sin(x^2 + y^2)$

(8) $z = x^2y^2 \log(x^3 + y^3)$

(9) $z = xy \arcsin \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(10) $z = x^x y^y x^y y^x$

この問題は解説の必要はないでしょう。偏微分の問題に見えるかもしれませんが，実質的には 1 変数関数の微分の問題です。$z = f(x, y)$ の様に 2 変数関数の場合 x で偏微分するという事は「y を固定して x で微分する」事を意味します。この事が分かっていれば 1 変数関数の微分法の諸公式が使えます。この問題ができない人は 1 変数関数の微分を復習して下さい。(10) のみやっておく。1 変数の場合の対数微分法を用いると $y = x^x$ の導関数は $\dfrac{dy}{dx} = x^x(\log x + 1)$ である事が分かる。よって

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial x^x}{\partial x} y^y x^y y^x + x^x \frac{\partial (y^y x^y y^x)}{\partial x} = \frac{\partial x^x}{\partial x} y^y x^y y^x + x^x y^y \frac{\partial (x^y y^x)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial x^x}{\partial x} y^y x^y y^x + x^x y^y \frac{\partial x^y}{\partial x} y^x + x^x y^y x^y \frac{\partial y^x}{\partial x} \\
&= x^x(\log x + 1) y^y x^y y^x + x^x y^x y x^{y-1} y^x + x^x y^x x^y y^x \log y
\end{aligned}$$

となる。$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ は各自計算を試みよ。