数理解析 I 問題解説 #9

河野

演習問題 2.4　次の関数に対し $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $z = f(x,y) = x + y^2, x + y = s, xy = t$

(2) $z = f(x,y) = x + y, x^2 + y^2 = s, x^2y^2 = t$

このタイプの問題は**必ず**できる様になっておいて下さい。(1) のみ解説しておく。最初に $\frac{\partial x}{\partial s}$ 等を求めるためにヤコビ行列を求める。$\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$ なので $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \left(\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x-y} & \frac{-1}{x-y} \\ \frac{-y}{x-y} & \frac{1}{x-y} \end{pmatrix}$ となる。$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$ より

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 1\frac{x}{x-y} + 2y\frac{-y}{x-y} = \frac{x-2y^2}{x-y}$$

$w = \frac{\partial z}{\partial s}$ とおくと $= \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$ あとは $\frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}$ を求めれば計算できます。他の導関数に関しては省略。

講義ではふれていないが $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}$ 等を求める別の方法を紹介しておく。方法が 2 つあると混乱する人は**読まないように**！

x, y と s, t の間の関係を与える式が 2 つある。この式 $x + y = s$ と $xy = t$ を s で微分すると $\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial s} = 1 (= \frac{\partial s}{\partial s})$ と $\frac{\partial x}{\partial s}y + x\frac{\partial y}{\partial s} = 0 (= \frac{\partial t}{\partial s})$ が分る。これを $\frac{\partial x}{\partial s}$ と $\frac{\partial y}{\partial s}$ に関する連結方程式と見て解くと $\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{x}{x-y}, \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{y}{x-y}$ を得る。また与式を t で微分する事により $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}$ が求まる。

演習問題 2.5

(1) $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha,\ y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ (α は定数) のとき次を示せ。

　1) $z_x^2 + z_y^2 = z_u^2 + z_v^2$

　2) $z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv}$

(2) $x + y = e^{u+v},\ x - y = e^{u-v}$ に対し $z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} - z_{vv})$ が成立することを示せ。

(3) $x + y = u,\ y = uv$ ならば $xz_{xx} + yz_{xy} + z_x = uz_{uu} - vz_{uv} + z_u$ となる事を示せ。

合成関数の微分法が分かっていればできると思われる。(1) のみ示す。x を u で微分すると $x_u = \cos\alpha$，v で微分すると $x_v = -\sin\alpha$ を得る。同様に $y_u = \sin\alpha,\ y_v = \cos\alpha$ が分かる。合成関数の微分法より $z_u = z_x x_u + z_y y_u$，$z_v = z_x x_v + z_y y_v$ が分かる。これを用いて $z_u^2 + z_v^2$ を計算すると $z_u^2 + z_v^2 = (z_x\cos\alpha - z_y\sin\alpha)^2 + (z_x\sin\alpha + z_y\cos\alpha)^2 = z_x^2\cos^2\alpha - 2z_xz_y\cos\alpha\sin\alpha + z_y^2\sin^2\alpha + z_x^2 + 2z_xz_y\sin\alpha\cos\alpha + z_y^2\cos^2\alpha = z_x^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + z_y^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = z_x^2 + z_y^2$ が分かる。

$z_u = z_x x_u + z_y y_u$ を u で微分すると，席の微分法より $(z_u)_u = (z_x)_u x_u + z_x(x_u)_u + (z_y)_u y_u + z_y(y_u)_u$ となる。x_u, y_u は定数なので $(x_u)_u = 0, (y_u)_u = 0$ である。また $(z_x)_u, (z_y)_u$ に合成関数の微分法をもう一度適用すると，$(z_x)_u = (z_x)_x x_u + (z_x)_y y_u, (z_y)_u = (z_y)_x x_u + (z_y)_y y_u$ となる。よってこれらを前式に代入すると $z_{uu} = z_{xx}x_u^2 + 2z_{xy}x_u y_u + z_{yy}y_u^2 = z_{xx}\cos^2\alpha + 2z_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + z_{yy}\sin^2\alpha$ を得る。ただし計算途中で $z_{xy} = z_{yx}$ を使用した。同様に z_{vv} を計算すると $z_{vv} = z_{xx}\sin^2\alpha - 2z_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + z_{yy}\cos^2\alpha$ を得，これらを加えると $z_{uu} + z_{vv} = z_{xx}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + z_{yy}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = z_{xx} + z_{yy}$ となる。

演習問題 2.6　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とする (2 次元の極座標表示)。関数 $z = f(x,y)$ に対し次を示せ。

(1) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ。

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$

この問題は前問と同様にできるので特に解説はしない。しかし極座標変換は大切なので一度は自分で計算をする事。極座標変換でのヤコビアンには積分の変数変換のとき必ず**出会います**。出会いたくない人も多いかもしれませんが…。

演習問題 2.7　次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $w = f(x,y,z) = x^2y^3z^4$　　(2) $w = xyz\sin(x^2+y^2+z^2)$

(3) $e^{x^2+y^3+z^4}$　　(4) $x^2y^3\log(x^2+y^3+z^4)$

3 変数関数の説明をしたので問題にしました。これができない場合事態は重大です。偏微分の部分を復習するか，自分でできない場合，または友達に聞いても分からない場合は，私に質問に来て下さい。

演習問題 2.8　次の関数に対し $\dfrac{\partial w}{\partial s}, \dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s\partial t}$ を求めよ。

(1) $w == x + y^2 + z^3$,$x + y + z = s, xy + yz + zx = t, xyz = u$

(2) $w = x + y + z$,$x^2 + y^2 + z^2 = s, xy^2z = t, xy + yz + zx = u$

演習問題 2.4 の 3 変数版です。(1) の前半のみやっておく。ただし 3 次行列の逆行列の求め方は既知とする。

$$\frac{\partial(s,t,u)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y} & \dfrac{\partial s}{\partial z} \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial y} & \dfrac{\partial t}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{pmatrix} \text{なので,}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t,u)} = \left(\frac{\partial(s,t,u)}{\partial(x,y,z)}\right)^{-1}$$

$$= \quad \frac{1}{(x-y)(y-z)(z-x)}\begin{pmatrix} x^2(z-y) & y^2(x-z) & z^2(y-x) \\ x(y-z) & y(z-x) & z(x-y) \\ z-y & x-z & y-x \end{pmatrix}$$

となる。$\dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial s}$ より計算を実行すればよい。

演習問題 2.9 $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ とする (3 次元の極座標表示)。関数 $w = f(x, y, z)$ に対し次を示せ。

(1) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ を計算せよ。

(2) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$

(3) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}$

この問題は演習問題 2.6 の 3 次元版です。3 次元の極座標変換も大切です。前問同様ヤコビ行列を求める事により計算できる。