数理解析 I 問題解説 #10

河野

演習問題 2.10　次の場合に $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 及び $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = u^2$　　(2) $x = u^2 - v^2, y = 2uv$

(3) $x = u\cos v, y = u\sin v$　　(4) $x = u, y = u + v$

この問と次の問は中間試験のために追加した問題です。ヤコビ行列の定義を知っていて，逆行列を計算できる人はできるはずです。(2) のみ示しておく。

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix} \text{ なので}$$

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1} = \frac{1}{4(u^2+v^2)}\begin{pmatrix} 2u & 2v \\ -2v & 2u \end{pmatrix} = \frac{1}{2(u^2+v^2)}\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

演習問題 2.11　次の関数に対し $\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = xy$　　(2) $z = x + y, s = x^2 - y^2, t = 2xy$

(3) $z = xy, s = x, t = x + y$　　(4) $z = xy, s = x\cos y, t = x\sin y$

(4) は第 1 回試験に出題した。この問題のみ解答しておく。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix} \text{ となるので}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} x\cos y & x\sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\dfrac{1}{x}\sin y & \dfrac{1}{x}\cos y \end{pmatrix} \text{ が得ら}$$

れる。$z_s = z_x x_s + z_y y_s$ なので $z_s = y\cos y + x\left(-\dfrac{1}{x}\sin y\right) = y\cos y - \sin y$ を得る。同様に $z_t = z_x x_t + z_y y_t$ なので $z_t = y\sin y + x\left(\dfrac{1}{x}\cos y\right) = y\sin y + \cos y$ を得る。

2 次導関数を求めるために z_s, z_t の x, y に関する偏導関数を計算する。z_s は x を変数に含まないので $(z_s)_x = 0, (z_t)_x = 0$ である。y に関して微分すると $(z_s)_y = \cos y - y\sin y - \cos y = -y\sin y, (z_t)_y = \sin y + y\cos y - \sin y = y\cos y$ を得る。合成関数の微分法を z_s, z_t に関して適用すれば 2 次導関数が求まる。計算するとそれぞれ $z_{ss} = (z_s)_x x_s + (z_s)_y y_s = (z_s)_y y_s = -y\sin y\left(-\dfrac{1}{x}\sin y\right) = \dfrac{y}{x}\sin^2 y$, $z_{tt} = (z_t)_x x_t + (z_t)_y y_t = (z_t)_y y_t = y\cos y\dfrac{1}{x}\cos y = \dfrac{y}{x}\cos^2 y$, $z_{st} = (z_s)_x x_t + (z_s)_y y_t = (z_s)_y y_t = -y\sin y\dfrac{1}{x}\cos y = -\dfrac{y}{x}\sin y\cos y$ を得る。

演習問題 2.12　次の関数を (a,b) において $n = 3$ とし，剰余項を無視したテーラー展開を求めよ。

(1) $z = f(x,y) = (x-1)(y+2)$　　$(a,b) = (0,0)$

(2) $z=f(x,y)=\dfrac{1}{1-2x+3y}\qquad (a,b)=(0,0)$

(3) $z=f(x,y)=\sin(x+y)\qquad (a,b)=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

この問題は実質的には導関数，2 次導関数，3 次導関数の計算問題です。多変数版テーラーの定理の内容が分かっていれば，導関数を計算してそこに代入すれば出来上がりです。この段階で導関数の計算ができない人は余りいないと思いますが，もしできなければ**緊急事態**です。その部分の復習を確実に。(3) のみ解答しておこう。

$f=\sin(x+y), f_x=\cos(x+y), f_y=\cos(x+y), f_{xx}=\sin(x+y), f_{xy}=-\sin(x+y), f_{yy}=-\sin(x+y), f_{xxx}=-\cos(x+y), f_{xxy}=-\cos(x+y), f_{xyy}=-\cos(x+y), f_{yyy}=-\cos(x+y)$ なので $f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=0, f_x\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi)=-1=f_y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(\pi)=0=f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), f_{xxx}\left(\frac{\pi}{2}+\theta h,\frac{\pi}{2}+\theta k\right)=-\cos\left(\pi+\theta h+\theta k\right)=f_{xxy}\left(\frac{\pi}{2}+\theta h,\frac{\pi}{2}+\theta k\right)=f_{xyy}\left(\frac{\pi}{2}+\theta h,\frac{\pi}{2}+\theta k\right)=f_{yyy}\left(\frac{\pi}{2}+\theta h,\frac{\pi}{2}+\theta k\right)$ となる。よって

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h,\frac{\pi}{2}+k\right)=-(h+k)+\frac{1}{3!}\left\{h^3+3h^2k+3hk^2+k^3\right\}\cos\left(\pi+\theta h+\theta k\right)$$

が得られる。

演習問題 2.13　次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z=x^2-xy+y^2-2x+3y+1$　　(2) $z=x^2-5xy+2y^2+x-y-3$

(3) $z=\dfrac{ax+by}{x^2+y^2+1}\ (a\neq 0, b\neq 0)$　　(4) $z=e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)\ (a>b>0)$

極値問題に関してもう一度解説しておくと，$z=f(x,y)$ の極値を求めるには，
(1) 臨界点を求める。これは **grad** の記号を使って述べれば $\mathbf{grad}\, f=\mathbf{0}$ の点である。(一般に) 高次の連立方程式を解けばよい。臨界点はあくまでも**極値を与える点の候補**だから，それが実際に極値になっているかどうか調べる必要がある。
(2) 臨界点におけるヘッシャンの値を計算する。値が 0 でなければ極値かどうかの判定ができる。
(3) ヘッシャンが 0 のときはこれだけでは判断できない。その問題ごと判断をする必要がある。次のいずれかになるかアタリをつけて証明を試みる。1) (a,b) の周りの (x,y) について $f(x,y)>f(a,b)$ が成立する。この場合は極少， 2) (a,b) の周りの (x,y) について $f(x,y)<f(a,b)$ が成立する。この場合は極大，3) (a,b) のいくらでも近くに $f(x_1,y_1)>f(a.b)$, $f(x_2,y_2)<f(a,b)$ となる点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ が存在する。この場合は極値でない。

(4) のみ示す。最初に (1) 臨界点を求める。$z_x=-2xe^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+2axe^{-(x^2+y^2)}$, $z_y=-2ye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+2bye^{-(x^2+y^2)}$ なので $z_x=2xe^{-(x^2+y^2)}(a-(ax^2+by^2))=0$ より $x=0$ または $ax^2+by^2=a$ となる。$z_y=2ye^{-(x^2+y^2)}(b-(ax^2+by^2))=0$ より $y=0$ または $ax^2+by^2=b$ となる。よって (a) $x=0$ かつ $y=0$，または (b) $x=0$ かつ $ax^2+by^2=b$，または (c) $ax^2+by^2=a$ かつ $y=0$，または (d) $ax^2+by^2=a$ かつ $ax^2+by^2=b$ の 4 つの場合となるが (d) のときは $a=b$ となるので起こり得ない。よって $(x,y)=(0,0)$ または $(x,y)=(0,\pm1)$ または $(x,y)=(\pm1,0)$ となる。

(2) ヘッシャンを計算する。

$$z_{xx}\ =\ -2e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+4x^2e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)-8ax^2e^{-(x^2+y^2)}+2ae^{-(x^2+y^2)}$$

$$
\begin{aligned}
z_{xy} &= 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) - 4axye^{-(x^2+y^2)} - 4bxye^{-(x^2+y^2)} \\
z_{yy} &= -2e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) + 4y^2e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) - 8by^2e^{-(x^2+y^2)} + 2be^{-(x^2+y^2)}
\end{aligned}
$$

$z_{xx}(0,0) = 2a > 0$, $z_{xy}(0,0) = 0$, $z_{yy}(0,0) = 2b > 0$ なので $H(0,0) = 4ab > 0$ である。$z_{xx}(0,\pm1) = 2e^{-1}(a-b) > 0$, $z_{xy}(0,\pm1) = 0$, $z_{yy}(0,\pm1) = -4be^{-1} < 0$ なので $H(0,\pm1) = -8e^{-2}(a-b)b < 0$ である。$z_{xx}(\pm1,0) = -4ae^{-1} > 0$, $z_{xy}(\pm1,0) = 0$, $z_{yy}(\pm1,0) = 2e^{-1}(b-a) < 0$ なので $H(\pm1,0) = -8e^{-2}(b-a)b > 0$ である。よって $(x,y) = (0,0), (\pm1,0)$ で極値をとる。この問題の場合 (3) の段階は必要ない。

演習問題 2.14

(1) 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積最大のものを求めよ。

(2) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。

このタイプの問題では何を変数に選ぶかで計算量が変わる。(1) のみ解答しておこう。ここではヘロンの公式を用いて解こう。ヘロンの公式：3 角形の 3 辺の長さを a,b,c とするとき，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とおくとき，3 角形の面積 S は $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ となる。

3 角形の各辺の長さを x,y,z とする。3 辺の長さの和は一定であるのでこれを $2s$ とおく，即ち $x+y+z = 2s$ $(s>0)$ が成立している。x,y,z は辺の長さであるから $x>0, y>0, z>0$ を満たしている。x,y,z が 3 角形の 3 辺をなすためには 3 角不等式，即ち $x+y>z, y+z>x, z+x>y$ が成立している事が必要である。逆にこれらの不等式が成立しているとき，3 辺の長さが x,y,z であるような 3 角形が存在する。z を消去して x,y の不等式から $x<s, y<s, x+y>s$ が得られる。逆にこの 3 つの不等式をみたす x,y は最初の 6 つの不等式を満たす。(この部分は各自チェックする事。) よって $D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x<s, y<s, x+y>s \right\}$ 上で最大値問題を考える。しかし講義で述べた様に，最大値定理を適用するには領域が有界閉集合である必要がある。

$\overline{D} = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \leqq s, y \leqq s, x+y \geqq s \right\}$ とおく。ここで S が最大のとき S^2 が最大であり，逆も成立する。よって S^2 が最大になる場合を求めればよい。$f(x,y) = S^2 = s(s-x)(s-y)(x+y-s)$ とおき，$\overline{D}$ 上で $f(x,y)$ の最大値を求める。$\overline{D}$ は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は $\overline{D}$ 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。境界上では関数は $f(x,y)=0$ となる。内部で最大値をとる点は (広義の) 極値になっている。臨界点を求める。$f_x = s(s-x)(s-y) - s(s-y)(x+y-s) = 0$, $f_y = s(s-x)(s-y) - s(s-x)(x+y-s) = 0$ より $(x,y) = (0,s).(s,0),(s,s),\left(\dfrac{2s}{3},\dfrac{2s}{3}\right)$ が得られる。この中に最大値を与える点が存在するので，それは $(x,y) = \left(\dfrac{2s}{3},\dfrac{2s}{3}\right)$ である。以上により最大値を与える 3 角形は**正 3 角形**である。

演習問題 2.15　次で与えられる陰関数に関し $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $1 - y + xe^y = 0$

(2) $x^3y^3 + y - x = 0$

両辺を x で微分すれば出て来るので，(1) のみ示しておく。

両辺を x で微分すると $-y' + e^y + xy'e^y = 0$ なので $y' = \dfrac{e^y}{1-xe^y}$ となる。$-y' + e^y + xy'e^y = 0$ を更に x で微分すると $-y'' + y'e^y + y'e^y + xy''e^y + x\left(y'\right)^2 e^y = 0$ を得る。この式を変形して

$y' = \dfrac{e^y}{1-xe^y}$ を代入すると $y'' = \dfrac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}$ となる。

演習問題 2.16

(1) $\varphi(x,y) = 2x^2+y^2-1=0$ の下で $f(x,y)=xy$ の最大値・最小値を求めよ。

(2) $\varphi(x,y) = x^2+y^2-1=0$ の下で $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ の最大値を求めよ。

(3) [**行列の固有値を知っている事を前提とする**] $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ の下で $f(x,y,z) = ax^2+by^2+cz^2+2pxy+2qyz+2rzx$ の最大値を求めよ。

(1) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$ とおく。$\varphi(x,y)=0$ という条件の下での $f(x,y)$ の極値を与える (x,y) は $\mathbf{grad}\,\varphi(x,y)=\mathbf{0}$ または $\mathbf{grad}\,F(x,y,\lambda)=\mathbf{0}$ となる (x,y,λ) から得られる。

$\mathbf{grad}\,\varphi = (4x,2y)$ なので，$\mathbf{grad}\,\varphi=\mathbf{0}$ となる x,y は $(x,y)=(0,0)$ であるが，これは条件 $\varphi(x,y)=0$ を満足しない。$\mathbf{grad}\,F=(F_x,F_y,F_\lambda)=(y-4\lambda x, x-2\lambda y, -(2x^2+y^2-1))=(0,0,0)$ より $y=4\lambda x$ を $x-2\lambda y$ に代入すると $(1-8\lambda^2)x=0$ となるので，$x=0$ または $1-8\lambda^2=0$ が成立する。$x=0$ のとき $y=0$ となり条件 $\varphi(x,y)=0$ を満たさない。よって $1-8\lambda^2=0$ より $\lambda=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる。$y=4\lambda x$ を $2x^2+y^2-1=0$ に代入して $2x^2+16\lambda^2x^2=(2+16\lambda^2)x^2=4x^2=1$ となる。よって $x=\pm\dfrac{1}{2}$ であり，$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。よって $F(x,y,\lambda)$ の臨界点 (x,y,λ) を与える x,y は $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である。

$\varphi(x,y)=0$ を満たす (x,y) は有界閉集合なので，連続関数 $f(x,y)=xy$ には最大値，最小値が存在する。これらは (広義の) 極値なので，上の (x,y) のいずれかである。よって $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，$(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ をとる。

(2) ここでは線型解析で学ぶ行列の固有値・固有ベクトルを既知として解答する。これを使わなくても計算は少し複雑になるが，勿論解答する事はできる。

前問と同様に $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$ の極値を与える x,y,λ を求める。$F_x=2ax+2by-2\lambda x$, $F_y=2bx+2cy-2\lambda y$ なので $F(x,y,\lambda)$ の臨界点を (x,y,λ) とすると，$ax+by=\lambda x, bx+cy=\lambda y$ を満たしている。$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと $A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となっている。即ち λ は A の固有値で，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は λ に属する A の固有ベクトルである。固有値は固有方程式 $\Phi_A(t)=\det(A-tE)=\det\begin{pmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{pmatrix}=t^2-(a+c)t+ac-b^2=0$ の解になっている。この 2 次方程式の判別式を D とすると $D=(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2$ となる。$D=0$ となるのは $a=c, b=0$ のときでそれ以外の場合は $D>0$ である。2 次方程式 $t^2-(a+c)t+ac-b^2=0$ の 2 解を λ_1,λ_2 とする。ただし $\lambda_1 \geqq \lambda_2$ とする。

λ_i $(i=1,2)$ に対応する固有ベクトルを (x_i,y_i) とする。ただし $x_i^2+y_i^2=1$ となる様に選んでおく。このとき $(x,y,\lambda)=(x_1,y_1,\lambda_1),(x_2,y_2,\lambda_2)$ は F の臨界点となる。逆に臨界点はこれらのみである。このときの f の値は，1 次行列とスカラーを同一視すると，$f(x_i,y_i)=(x_i\ y_i)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}=$

$(x_i\ y_i)\lambda_i\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \lambda_i(x_i^2+y_i^2) = \lambda_i$ と計算できる。

$\left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \varphi(x,y) = x^2+y^2-1=0 \right\}$ は有界閉集合なので，連続関数 $f(x,y)$ には最大値・最小値が存在する。$\mathbf{grad}\,\varphi = \mathbf{0}$ となる (x,y) は条件を満たさないので，F の極値を与える (x,y,λ) の中に $f(x,y)$ の最大値・最小値を与える (x,y) がある。以上より $(x,y)=(x_1,y_1)$ のとき $f(x,y)$ は最大値 λ_1 をとり，$(x,y)=(x_2,y_2)$ のとき $f(x,y)$ は最小値 λ_2 をとる。ただし $a=c, b=0$ の時は最大値と最小値は一致する。即ち $f(x,y)=a(x^2+y^2)=a$ となっている。

(3) 前問と同様に固有値・固有ベクトルの知識を既知とする。

$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda\varphi(x,y,z)$ の極値を与える (x,y,z,λ) を求める。$F_x = 2ax+2py+2rz-2\lambda x, F_y = 2px+2by+2qz-2\lambda y, F_z = 2rx+2qy+2cz-2\lambda z$ なので $F(x,y,z,\lambda)$ の臨界点を (x,y,z,λ) とすると，$ax+py+rz=\lambda x, px+by+qz=\lambda y, rx+qy+cz=\lambda z$ を満たしている。$A = \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ となっている。即ち λ は A の固有値で，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は λ に属する A の固有ベクトルである。固有値は固有方程式 $\Phi_A(t) = \det(A-tE) = \det\begin{pmatrix} a-t & p & r \\ p & b-t & q \\ r & q & c-t \end{pmatrix} = -t^3-(a+b+c)t^2+(p^2+q^2+r^2-ab-bc-ca)t+2pqr-p^2c-q^2a-r^2b=0$ の解になっている。3 次方程式は実数解を持つ。実数解 λ に対し対応する固有ベクトルを (x,y,z) とする。ただし $x^2+y^2+z^2=1$ となる様に選んでおく。このとき (x,y,z,λ) は F の臨界点となる。逆に臨界点はこれらのみである。このときの f の値は，1 次行列とスカラーを同一視すると，$f(x,y,z) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x\ y\ z)\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda(x^2+y^2+z^2) = \lambda$ と計算できる。

固有方程式の実数解で最大なものを λ_1，最小なものを λ_2 とし，対応する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ とする。

$\left\{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1=0 \right\}$ は有界閉集合なので，連続関数 $f(x,y,z)$ には最大値・最小値が存在する。$\mathbf{grad}\,\varphi = \mathbf{0}$ となる (x,y,z) は条件を満たさないので，F の極値を与える (x,y,z,λ) の中に $f(x,y,z)$ の最大値・最小値を与える (x,y,z) がある。以上より $(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)$ のとき $f(x,y,z)$ は最大値 λ_1 をとり，$(x,y,z)=(x_2,y_2,z_2)$ のとき $f(x,y,z)$ は最小値 λ_2 をとる。