

演習問題 3.1 次の関数の不定積分を求めよ。

- (1) $(2x+5)^6$ (2) e^{-2x} (3) $\sin \frac{x}{2}$ (4) $\frac{1}{x(x-1)}$
 (5) $\frac{x}{(1+x^2)^3}$ (6) $\arctan x$ (7) $\arcsin x$ (8) $(\log x)^2$
 (9) $x \sin x$ (10) $x^2 \cos x$

幾つか典型例を解説しておく。講義でも何度もくどくど述べているが、不定積分は計算結果がでたら必ず検算をすること。微分してそれが被積分関数に一致したらあっているという事である。

(1) 置換積分では変数をどう置くかがポイントになる。この問題の場合何も知識がなくても次の様に置くという事は気がつくだろう。 $u = 2x+5$ とおく $\frac{du}{dx} = 2$ なので $\frac{dx}{du} = \frac{1}{2}$ である。 $\int (2x+5)^6 dx =$

$$\int u^6 \frac{dx}{du} du = \frac{1}{2} \int u^6 du = \frac{1}{2} \frac{1}{7} u^7 = \frac{1}{14} (2x+5)^7$$

(4) $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ と部分分数展開する。 $\int \frac{1}{x(x-1)} dx = \int \left\{ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right\} dx = \log|x-1| - \log|x|$

(6) 部分積分法にすぐ気がつく人は積分の問題に熟達しつつある人かもしれない。

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \text{ である。 } \int \arctan x dx = \int (x)' \arctan x dx \text{ と見て部分積分を実行すると}$$

$$\int (x)' \arctan x dx = x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

(8) 形を見てとりあえず $t = \log x$ とおいて計算を実行してみる。 $t = \log x$ と置くと $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ な

ので $\frac{dx}{dt} = x = e^t$ である。 $\int (\log x)^2 dx = \int t^2 \frac{dx}{dt} dt = \int t^2 e^t dt$ (これは典型的な部分積分法の問

題) 部分積分法を 2 回行くと $\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2te^t + 2e^t = x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x$ となる。

問題解法のヒントを書いておくと、(1)–(3),(5) は置換積分法、(6)–(10) は部分積分法でできる。