# 数理解析 I 問題解説 #12

河野

最後の演習問題以外の問題の解答を付けておく。いきなり解答を見ずに，先ず自分で考える事。見る場合も解答の方向が分かったら途中からでも自分で計算した方が力がつくと思われる。

**演習問題 3.2**　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$　(2) $\dfrac{1}{x^4+1}$　(3) $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$

(4) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$　(5) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+2}$　(6) $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$

**(1)** $x^3=(x+1)^2(x-2)+3x+2$ より $\dfrac{x^3}{(1+x)^2}=x-2+\dfrac{3x+2}{(1+x)^2}$ となる。$\dfrac{f(x)}{(x+a)^n}$ の積分は $\dfrac{f(x)}{(x+a)^n}=\dfrac{a_1}{x+a}+\dfrac{a_2}{(x+a)^2}+\cdots\dfrac{a_{n-1}}{(x+a)^n}$ の形に変形すればできる。$\dfrac{3x+2}{(1+x)^2}=\dfrac{3(1+x)-1}{(1+x)^2}=\dfrac{3}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}$ なので，

$$\begin{aligned} I=\int\frac{x^3}{(1+x)^2} &= \int\left\{x-2+\frac{3}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\right\}dx \\ &= \frac{x^2}{2}-2x+3\log|1+x|+\frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

**(2)** 講義で説明したように分母は $x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ と因数分解できる。部分分数展開を行うと $\dfrac{1}{x^4+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\dfrac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right\}$ となる。$(x^2+\sqrt{2}x+1)'=2x+\sqrt{2}$ なので

$$\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}=\frac{\frac{1}{2}\left\{\left(2x+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right\}}{x^2+\sqrt{2}x+1}=\frac{1}{2}\frac{(x^2+\sqrt{2}x+1)'}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

と変形する。同様に $\dfrac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2-\sqrt{2}x+1)'}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$ となる。

$$\int\frac{(x^2\pm\sqrt{2}x+1)'}{x^2\pm\sqrt{2}x+1}dx=\log(x^2\pm\sqrt{2}x+1)$$

なので残り $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\pm\sqrt{2}x+1}dx$ を計算する。(+ の場合と − の場合を平行にできるので一度に計算する) $x^2\pm\sqrt{2}x+1=x^2\pm2\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}=\left(x\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$ なので $u=x\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ とおくと $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\pm\sqrt{2}x+1}dx=\int\frac{1}{u^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}du$ となるので，更に $u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan t$ とおいて置換積分を実行する。$\displaystyle\int\frac{1}{u^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}du=\sqrt{2}\int dt=\sqrt{2}t=\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}u$ となるので，これ

までの計算をまとめると

$$\frac{\sqrt{2}}{8}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)-\frac{\sqrt{2}}{8}\log(x^2-\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)$$

となる。

**(3)** $\dfrac{1}{x(x^4-1)}=\dfrac{x}{2(x^2+1)}+\dfrac{1}{4(x-1)}+\dfrac{1}{4(x+1)}-\dfrac{1}{x}$ となるので，

$$I=\int\frac{1}{x(x^4-1)}dx \quad = \quad \frac{1}{4}\log(x^2+1)+\frac{1}{4}\log|x-1|+\frac{1}{4}\log|x+1|-\log|x|$$

**(4)** このタイプはプリントに説明は書いてあるが，講義ではきちんと証明していない。一般の $n$ に対する $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)^n}dx$ の計算には漸化式を使う必要があるが，この場合 $n=2$ なので，直接計算する事ができる。

最初に $\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)'=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ である事を注意しておく。$\dfrac{1}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$ となる。$\displaystyle\int\left\{-\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\right\}dx=\frac{1}{2}\int\left\{-\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\right\}dx=\frac{1}{2}\int x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'dx$ (ここで部分積分) $=\displaystyle\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{x^2+1}-\int\frac{1}{x^2+1}dx\right\}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x^2+1)^2} &= \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx\\ &= \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x\end{aligned}$$

**(5)** $(x^2+2x+2)'=2x+2$ より $x-1=\dfrac{1}{2}(2x+2)-2$ と変形し，$\dfrac{x-1}{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}-\dfrac{2}{x^2+2x+2}$ となる。$x^2+2x+2=x^2+2x+1+1=(x+1)^2+1$ なので $u=x+1$ とおいて $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+2x+2}dx$ を計算すると，$I=\displaystyle\int\frac{1}{x^2+2x+2}dx=\int\frac{1}{1+u^2}du$(ここで $u=\tan t$ とおく) $=\displaystyle\int dt=t=\arctan u=\arctan(x+1)$ となるので，

$$I \quad = \quad \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2)-2\arctan(x+1)$$

**(6)** $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}=\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x}$ より

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}dx &= \int\frac{2}{(x-1)^2}dx+\int\frac{1}{x}dx\\ &= \log|x|-\frac{2}{x-1}\end{aligned}$$

**演習問題 3.3**　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\cos x}$　　(2) $\dfrac{1}{1+\sin x}$　　(3) $\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$

(4) $\dfrac{1}{\tan x}$ (5) $\dfrac{1}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}$

3 角関数の有理関数の不定積分において $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおく置換積分は万能であるが，計算は一般に複雑になる。この置換積分を実行する前に他の方法がないか考えてみて，ダメな場合のみこの方法で計算するようにした方がよい。

**(1)** $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(1+t^2)$ なので $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$ となる。また $\cos x = \cos 2\dfrac{x}{2} = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ となる。このあたりの計算は自分で 1 回は必ずやっておいて下さい。よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x}dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{dx}{dt}dt = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{2}{1-t^2}dt = \int\left\{\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right\}dt \\
&= \log|1+t| - \log|1-t| \\
&= \log\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| - \log\left|1-\tan\frac{x}{2}\right|
\end{aligned}$$

**(2)** $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(1+t^2)$ なので $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$ となる。また $\sin x = \sin 2\dfrac{x}{2} = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$ となる。しつこいですが，このあたりの計算は自分で 1 回は必ずやっておいて下さい。よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sin x}dx &= \int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1+t^2+2t}dt = \int \frac{2}{(t+1)^2}dt \\
&= -\frac{2}{1+t} = -\frac{2}{1+\tan\dfrac{x}{2}}
\end{aligned}$$

**(3)** $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(1+t^2)$ なので $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$ となる。また $\cos x = \cos 2\dfrac{x}{2} = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}} =$

$\dfrac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \sin 2\dfrac{x}{2} = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$ となる。よって $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x - \cos x}dx = \int \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2} - \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{t^2+2t-1}dt$ となる。$t^2+2t-1=0$ の 2 解を $\alpha, \beta$ とする。ただし $\alpha > \beta$ とする。このとき $\dfrac{1}{t^2+2t-1} = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{1}{t-\alpha} - \dfrac{1}{t-\beta}\right)$ となるので

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{t-\alpha} - \frac{1}{t-\beta}\right)dt \\
&= \frac{2}{\alpha-\beta}\left(\log|t-\alpha| - \log|t-\beta|\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\log\left|\tan\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}\right| - \log\left|\tan\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}\right|\right\}
\end{aligned}$$

**(4)** この問題は $t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置かない方が計算が簡単になる。

$t = \sin x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = \cos x$ より $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\cos x}$ となる。

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\tan x}dx &= \int \frac{1}{\dfrac{\sin x}{\cos x}}\frac{dx}{dt}dt = \int \frac{\cos x}{t}\frac{1}{\cos x}dt \\
&= \int \frac{1}{t}dt = \log|t| = \log|\sin x|
\end{aligned}$$

**(5)** $a=0$ または $b=0$ のときは難しくないので $ab \neq 0$ の場合のみ解答する。

$\displaystyle\int \frac{1}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{a+b\tan^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}dx$ と変形する。$u = \tan x$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ より $\dfrac{dx}{du} = \cos^2 x$ である。$I = \displaystyle\int \frac{1}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{a+bu^2}\frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{du}du = \int \frac{1}{bu^2+a}du = \frac{1}{b}\int\frac{1}{u^2+\dfrac{a}{b}}du$ となるが，ここで場合分けが必要になる。$ab > 0$ のとき $u = \sqrt{\dfrac{a}{b}}\tan t$ とおくと $\displaystyle\int \frac{1}{u^2+\dfrac{a}{b}}du = \sqrt{\frac{b}{a}}\int dt = \sqrt{\frac{b}{a}}t = \sqrt{\frac{b}{a}}\arctan\sqrt{\frac{b}{a}}u$ となる。よって

$$I = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\tan x\right) = \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\tan x\right)$$

となる。$ab < 0$ のときはここは間違っていたので訂正しました。

$$\frac{1}{u^2+\dfrac{a}{b}} = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{b}{a}}\left(\frac{1}{u-\sqrt{-\dfrac{a}{b}}} - \frac{1}{u+\sqrt{-\dfrac{a}{b}}}\right)$$

となるので

$$\int \frac{1}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}dx = \frac{1}{2b}\sqrt{-\frac{b}{a}}\left\{\log\left|u-\sqrt{-\frac{a}{b}}\right| - \log\left|u+\sqrt{-\frac{a}{b}}\right|\right\}$$

$$= \frac{1}{2b}\sqrt{-\frac{b}{a}}\left\{\log\left|\tan x - \sqrt{-\frac{a}{b}}\right| - \log\left|\tan x + \sqrt{-\frac{a}{b}}\right|\right\}$$

となる

**演習問題 3.4**　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$　(2) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x-1}}$　(3) $\dfrac{x}{(x-a)\sqrt{x+b}}$

無理関数の積分は無理式そのものを $t$ とおけばよい。

**(1)** $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ と置くと，$t^2 = \dfrac{1-x}{x}$ より $x = \dfrac{1}{1+t^2}$ となる。よって $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$ となる。$I = \displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{x}}dx = \int t\frac{dx}{dt}dt = -\int \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}dt = \int \left\{\frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{1+t^2}\right\}dt$ だが第 1 項の積分は $\displaystyle\int \frac{2}{(1+t^2)^2}dt = \frac{t}{1+t^2} + \arctan t$ となるので (演習問題 3.2(4) でやっている)

$$I = x\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

となる。

**(2)** $t = \sqrt{x-1}$ と置くと $t^2 = x-1, x = t^2+1, \dfrac{dx}{dt} = 2t$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}dx &= \int \frac{1}{t^2+1+t}2tdt = \int \left\{\frac{(t^2+t+1)'}{t^2+t+1} - \frac{1}{t^2+t+1}\right\}dt \\ &= \log(t^2+t+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right) \\ &= \log(x+\sqrt{x-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

となる。(この部分を読むころは計算に慣れて来たと思われるので途中計算を省略している。分からない人は $t+\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan u$ と置いて計算すること。)

**(3)** $t = \sqrt{x+b}$ と置くと $t^2 = x+b, x = t^2-b, \dfrac{dx}{dt} = 2t$ となる。$I = \displaystyle\int \frac{x}{(x-a)\sqrt{x+b}}dx = \int \frac{t^2-b}{(t^2-a-b)t}2tdt = 2\int \frac{t^2-b}{t^2-(a+b)}dt = 2\int\left\{1+\frac{a}{t^2-(a+b)}\right\}dt$ なので場合分けをする。

$a+b=0$ のときは

$$I = 2\int\left\{1+\frac{a}{t^2}\right\}dt = 2t - \frac{2a}{t} = 2\sqrt{x+b} - \frac{2a}{\sqrt{x+b}}$$

となる。$a+b>0$ のときは $\dfrac{2a}{t^2-(a+b)} = \dfrac{a}{\sqrt{a+b}}\left(\dfrac{1}{t-\sqrt{a+b}} - \dfrac{1}{t+\sqrt{a+b}}\right)$ と部分分数展開され

$$\begin{aligned}I &= 2t + \frac{a}{\sqrt{a+b}}\log\left|t-\sqrt{a+b}\right| - \frac{a}{\sqrt{a+b}}\log\left|t+\sqrt{a+b}\right| \\ &= 2\sqrt{x+b} + \frac{a}{\sqrt{a+b}}\log\left|\sqrt{x+b}-\sqrt{a+b}\right| - \frac{a}{\sqrt{a+b}}\log\left|\sqrt{x+b}+\sqrt{a+b}\right|\end{aligned}$$

となる。$a+b<0$ のときは $t=\sqrt{-(a+b)}\tan u$ と置く事により

$$
\begin{aligned}
I=\int\frac{x}{(x-a)\sqrt{x+b}}dx &= 2t+\frac{1}{\sqrt{-(a+b)}}\arctan\frac{t}{\sqrt{-(a+b)}}\\
&= 2\sqrt{x+b}+\frac{1}{\sqrt{-(a+b)}}\arctan\frac{\sqrt{x+b}}{\sqrt{-(a+b)}}
\end{aligned}
$$

となる。

**演習問題 3.5**　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$　(3) $\sqrt{x^2+a}$

(4) $\sqrt{a^2-x^2}$　(5) $x^2\sqrt{a^2-x^2}$

講義では 3 角関数を用いる方法と無理式を用いる方法の 2 つを紹介した。その両方で解いてみる。方法によって計算の難度に違いが出る。

**(1)** (3 角関数) $x=a\sin t$ と置くと $\dfrac{dx}{dt}=a\cos t, a^2-x^2=a^2-a^2\sin^2 t=a^2(1-\sin^2 t)=a^2\cos^2 t$ となるので，$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{1}{a\cos t}a\cos t dt=\int dt=t=\arcsin\frac{x}{a}$ となる。

(無理関数) $x=\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ と置くと，$t^2=\dfrac{a-x}{a+x}$ より $x=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}$ となる。$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-4at}{(1+t^2)^2}$，また $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}(a+x)^2}=\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}(a+x)=t(x+a)=\dfrac{2at}{1+t^2}$ となる。

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx &= \int\frac{1+t^2}{2at}\frac{-4at}{(1+t^2)^2}dt=-2\int\frac{1}{1+t^2}dt\\
&= -2\arctan t=-2\arctan\left(\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)
\end{aligned}
$$

**(2)** (3 角関数) $x=a\tan t$ と置くと $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{a}{\cos^2 t}$，$x^2+a^2=a^2(\tan^2+1)=\dfrac{a^2}{\cos^2 t}$ となる。$\displaystyle I=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\int\frac{\cos t}{a}\frac{a}{\cos^2 t}dt=\int\frac{1}{\cos t}dt$ となるがこれは演習問題 3.3(1) ですでに計算しているので，

$$
\begin{aligned}
I &= \log\left|1+\tan\frac{t}{2}\right|-\log\left|1-\tan\frac{t}{2}\right|\\
&= \log\left|1+\tan\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{a}\right)\right|-\log\left|1-\tan\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{a}\right)\right|
\end{aligned}
$$

となる。

(無理関数) $\sqrt{x^2+a^2}=t-x$ と置くと，$x^2+a^2=t^2-2tx+x^2$ より $x=\dfrac{t^2-a^2}{2t}$ となる。$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2+a^2}{2t^2}$，$\sqrt{x^2+a^2}=t-\dfrac{t^2-a^2}{2t}=\dfrac{t^2+a^2}{2t}$ なので

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx &= \int\frac{2t}{t^2+a^2}\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|\\
&= \log\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)
\end{aligned}
$$

となる。

**(3)** (3 角関数) $a=0$ のときは省略。最初に $a>0$ の場合を考える。$x=\sqrt{a}\tan t$ とおくと今までの計算と同様に $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\sqrt{a}}{\cos^2 t}$，$x^2+a=\dfrac{a}{\cos^2 t}$ となる。$I=\displaystyle\int\sqrt{x^2+a}dx=\int\frac{\sqrt{a}}{\cos t}\frac{\sqrt{a}}{\cos^2 t}dt=a\int\frac{1}{\cos^3 t}dt$ となる。$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^3 t}dt=\int\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^3 t}dt=\int\left\{\frac{1}{\cos t}+\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}\right\}dt$ と変形する。$\displaystyle\left(\frac{1}{\cos^2}\right)'=\frac{2\sin t}{\cos^3 t}$ なので $\displaystyle\int\frac{\sin^2}{\cos^3}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos^2}\right)'\sin tdt=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin t}{\cos^2 t}-\int\frac{1}{\cos^2 t}\cos t\right\}dt$ となる。これをもとの式に代入して

$$
\begin{aligned}
I= &= a\int\frac{1}{\cos t}dt+\frac{a\sin t}{2\cos^2 t}-\frac{a}{2}\int\frac{1}{\cos t}dt \\
&= \frac{a}{2}\int\frac{1}{\cos t}dt+\frac{a\sin t}{2\cos^2 t}=\frac{a}{2}\log\left|1+\tan\frac{t}{2}\right|-\frac{a}{2}\log\left|1-\tan\frac{t}{2}\right|+\frac{a\sin t}{2\cos^2 t} \\
&= \frac{a}{2}\log\left|1+\tan\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right|-\frac{a}{2}\log\left|1-\tan\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right|+\frac{a\sin\left(\arctan\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{2\cos^2\left(\arctan\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}
\end{aligned}
$$

となる。

次に $a<0$ の場合を考える。$x=\dfrac{\sqrt{-a}}{\sin t}$ とおくと $x^2+a=\dfrac{-a}{\sin^2 t}+a=\dfrac{-a(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t}=\dfrac{-a\cos^2 t}{\sin^2 t}$，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\sqrt{-a}\cos t}{\sin^2 t}$ となっている。$I=\displaystyle\int\sqrt{x^2+a}dx=\int\frac{\sqrt{-a}\cos t}{\sin t}\frac{\sqrt{-a}\cos t}{\sin^2 t}dt=-a\int\frac{\cos^2 t}{\sin^3 t}dt$ となる。ここで $\displaystyle\left(\frac{1}{\sin^2 t}\right)'=-2\frac{\cos t}{\sin^3 t}$ なので

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{a}{2}\int\left(\frac{1}{\sin^2}\right)'\cos tdt \\
&= \frac{a}{2}\left\{\frac{\cos t}{\sin^2 t}+\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}\right)\sin tdt\right\} \\
&= \frac{a\cos t}{2\sin^2 t}+\frac{a}{2}\int\frac{1}{\sin t}dt \\
&= \frac{a\cos t}{2\sin^2 t}+\frac{a}{2}\log\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right| \\
&= \frac{a\cos\arcsin\frac{\sqrt{-a}}{x}}{2\sin^2\arcsin\frac{\sqrt{-a}}{x}}+\frac{a}{2}\log\left|\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{-a}}{x}\right)\right|
\end{aligned}
$$

(無理関数) $\sqrt{x^2+a}=t-x$ と置くと，$x^2+a=t^2-2tx+x^2$ より $x=\dfrac{t^2-a}{2t}$ となる。$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2+a}{2t^2}$，$\sqrt{x^2+a}=t-\dfrac{t^2-a}{2t}=\dfrac{t^2+a}{2t}$ なので $I=\displaystyle\int\sqrt{x^2+a}dx=\int\frac{t^2+a}{2t}\frac{t^2+a}{2t^2}dt=\frac{1}{4}\int\frac{t^4+2at^2+a^2}{t^3}dt=\frac{1}{4}\int\left\{t+\frac{2a}{t}+\frac{a^2}{t^2}\right\}dt=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}t^2+2a\log|t|-\frac{a^2}{2}\frac{1}{t^2}\right\}$ となる。$t^2-\dfrac{a^2}{t^2}=\dfrac{(t^4-a^2)}{t^2}=\dfrac{(t^2-a)(t^2+a)}{t^2}=\dfrac{(2tx)(2t\sqrt{x^2+a})}{t^2}=4x\sqrt{x^2+a}$ より

$$
I = \frac{a}{2}\log\left|\sqrt{x^2+a}+x\right|+x\sqrt{x^2+a}
$$

となる。

**(4)** (3 角関数) $x = a\sin t$ と置くと $\dfrac{dx}{dt} = a\cos t, a^2-x^2 = a^2-a^2\sin^2 t = a^2(1-\sin^2 t) = a^2\cos^2 t$ となるので,

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}dx &= \int a\cos t\cdot a\cos tdt = a^2\int\cos^2 tdt = a^2\int\frac{\cos 2t+1}{2}dt\\ &= \frac{a^2}{2}\left\{\frac{\sin 2t}{2}+t\right\} = \frac{a^2}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{a}\right)+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\end{aligned}$$

となる。このままでのよいが更に計算を実行して $\sin\left(2\arcsin\dfrac{x}{a}\right) = 2\sin\left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right) = 2x\sqrt{a^2-x^2}$ としてもよい。

(無理関数) $t = \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ と置くと $t^2 = \dfrac{a-x}{a+x}$ より $x = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ となる。これを微分して $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{-4at}{(1+t^2)^2}$ となる。$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{(a-x)(a+x)} = \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}(a+x)^2} = \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}(a+x) = t\left(a+a\dfrac{1-t^2}{a+t^2}\right) = \dfrac{2at}{1+t^2}$ なので $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \int\frac{2at}{1+t^2}\frac{-4at}{(1+t^2)^2}dt = -8a^2\int\frac{t^2}{(1+t^2)^3}dt$ となる。$\left(\dfrac{1}{(1+t^2)^2}\right)' = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^3}$ より

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}dx &= 2a^2\int\left(\frac{1}{(1+t^2)^2}\right)'tdt\\ &= 2a^2\left\{\frac{t}{(1+t^2)^2}+\int\frac{1}{(1+t^2)^2}dt\right\}\\ &= \frac{2a^2t}{(1+t^2)^2}+\frac{a^2t}{1+t^2}+\arctan t\\ &= \frac{2a^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}}{\left(1+\frac{a-x}{a+x}\right)^2}+\frac{a^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}}{1+\frac{a-x}{a+x}}+\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\end{aligned}$$

**(5)** (3 角関数) $x = a\sin t$ と置くと $\dfrac{dx}{dt} = a\cos t, a^2-x^2 = a^2\cos^2 t$ となる。

$$\begin{aligned}I &= \int a^2\sin^2 ta\cos ta\cos tdt = a^4\int(\sin t\cos t)^2 dt\\ &= a^4\int\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{a^4}{4}\int\sin^2 2tdt\\ &= \frac{a^4}{4}\int\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{a^4}{8}\left\{t-\frac{1}{4}\sin 4t\right\}\\ &= \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{a^4}{32}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$

(無理関数) $x = \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ と置くと $\sqrt{a^2-x^2} = \dfrac{2at}{1+t^2}, x = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{-4at}{(1+t^2)^2}$ となる。$\displaystyle I = \int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \int a^2\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\frac{2at}{1+t^2}\frac{-4at}{(1+t^2)^2}dt = -8a^4\int\frac{(1-t^2)^2t^2}{(1+t^2)^5}dt$ となる。有

理関数の積分なので計算可能である。計算を実行すると (詳細省略),

$$I = \frac{a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8} - \frac{x(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}{4} + \frac{a^4}{8}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$$

となる。

**演習問題 3.6**　今までは学んだ事に対応する演習問題で，演習問題の場所によってどの方法を使うかというのは明らかであった。最後に色々なタイプを混ぜて演習問題とする。積分計算の手法を身につけるのが目的なのですべてを解く必要はない。また中には難問もある。嗅覚を働かせてそれを避ける練習にもなるかもしれない。

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\tan x$　(2) $x^2 \log x$　(3) $\dfrac{1}{a+b\sin x}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(5) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$　(6) $\sqrt{x^2-1}$

(7) $\dfrac{1}{1+x^2}$　(8) $\dfrac{1}{4+x^2}$　(9) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

(10) $\sin 4x$　(11) $\sin x \log(\sin x)$　(12) $\log(2x+1)$

(13) $e^{3x+1}$　(14) $xe^{2x^2+3}$　(15) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(16) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$　(17) $e^{ax}\cos bx$　(18) $e^{ax}\sin bx$

(19) $xe^{-x}$　(20) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$　(21) $\dfrac{1}{1+x^3}$

(22) $\log(1+\sqrt{x})$　(23) $\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$　(24) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$

(25) $\dfrac{1}{a\sin x^2+b\cos x^2}$　(26) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$　(27) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$

(28) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$　(29) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$　(30) $\sqrt{1-x^2}$

(31) $\dfrac{1}{\sin x}$　(32) $\dfrac{1}{3+\cos x}$　(33) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$

(34) $\dfrac{1}{R^2-2RS\cos x+S^2}$　(35) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$　(36) $\dfrac{1}{\sin x\cos^5 x}$

(37) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$　(38) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$　(39) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x-1}}$

(40) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$　(41) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$　(42) $\dfrac{x}{\sqrt{2-x-x^2}}$

(43) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$　(44) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$　(45) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$

(46) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$　(47) $\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}$　(48) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$

(49) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$　(50) $\dfrac{x^4}{\sqrt[4]{1+x^4}}$　(51) $\dfrac{(a+bx^3)^{3/2}}{x}$

(52) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$　(53) $\dfrac{1}{x(\log x)^n}$　(54) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

(55) $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$　(56) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$　(57) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$

(58) $\dfrac{1}{(1-x)^{2/3}-(1-x)^{1/2}}$

(59) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+4)}$

(60) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

(61) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(62) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$

(63) $(ax^2+bx+c)e^x$

(64) $\dfrac{1-x^2}{1+x^2\sqrt{1+x^4}}$

(65) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$

(66) $\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x}}$

(67) $\dfrac{e^x}{x}+e^x\log x$

(68) $e^x\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$

(69) $\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$

(70) $\dfrac{1}{x^3(x+1)}$

(71) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$

(72) $\dfrac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}$

(73) $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$

(74) $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$

(75) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$

(76) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$

(77) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$

(78) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$

(79) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$

(80) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

(81) $\dfrac{1}{1+x\sqrt{1+x^2}}$

(82) $\sqrt{x+\sqrt{x^2+2}}$

(83) $\dfrac{1-2x}{(3-2x)\sqrt{1-x^2}}$

(84) $\dfrac{1}{(4-3x^2)\sqrt{3+4x^2}}$

(85) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$

(86) $\sqrt{(1-\sqrt[3]{x^2})^3}$

(87) $\dfrac{1}{x^3(1+x^3)^{1/3}}$

(88) $x^5(x^3+a^3)^{3/2}$

(89) $\dfrac{x^2}{\sqrt{(a+bx^2)^5}}$

(90) $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$

(91) $\dfrac{x\arcsin x}{(1+x^2)^2}$

(92) $\dfrac{x}{1+\cos x}$

(93) $\sin(\log x)$