数理解析 II 要綱 #1　　2004–10–5　　河野

今回の講義から数理解析 II に入る。要綱の number 及びページ数は 1 から始めるが，章の数は前期からの継続とする。

4　1 変数関数の定積分

不定積分の所でもふれたが，定積分は定義だけから見ると不定積分とは無関係である。定義としては無関係の両者の間に関係が成立する事 (微積分の基本定理) が積分の理論的把握のキーポイントである。この事については定義の後にもう一度ふれる。

4.1　定義と性質

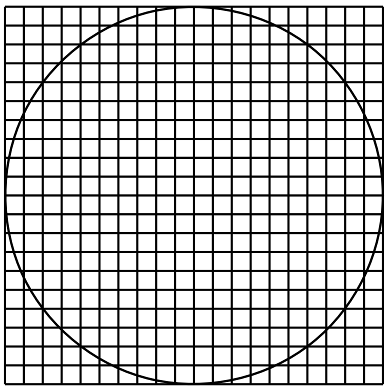

図 4.1

長方形や 3 角形などの多角形の面積の概念は，古代メソポタミアやエジプトではすでに知られていたようである。多角形以外の図形の面積を求める努力も古くからなされていた。理論的解明として文献で確認できる最古のものとしては古代ギリシャがある。古代ギリシャのアルキメデスは放物線と直線に囲まれた部分の面積を求めている。定積分はその流れをくんだものといえる。ここでは円の面積を近似的に求める事を考える。勿論円の面積の公式は知らないものとする。

図 4.1 の円の半径は 1 とし，長さが $\dfrac{1}{10}$ のメッシュを考える。円にすっぽり含まれている正方形を数えると 276 個ある。一部含まれている正方形は 76 個ある。一部含まれている正方形を平均して半分含まれていると考える。1 個の小正方形の面積は $\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{100}$ なので，面積はおおよそ

$$276\times\frac{1}{100}+76\times\frac{1}{100}\times\frac{1}{2}=3.14$$

と考えられる。**正確な値を知っている立場から見れば**，得られた答えは小数点以下 2 桁まで正しく求まっている。しかし我々は円の面積の公式を知らない立場で考えているので，円周率なるもの

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

も当然知らないと考えた方がよいであろう。**正確な値を知らない**場合はどう評価したらよいであろう。円の面積は 276 個の小正方形全体の面積よりは大きいし，半分入っている正方形も 1 個と数えた $276+76=352$ 個の小正方形全体の面積よりは小さい。よって

$$2.76 < \text{円の面積} < 3.52$$

が分かる。

メッシュを細かくすれば精度は上がっていく。メッシュの幅を $\dfrac{1}{100}$ にして同様の事を実行すると

$$3.1016 < \text{円の面積} < 3.1796$$

が得られる(1)。幅を更に細かくして $\dfrac{1}{1000}$ にすると

$$3.137548 < \text{円の面積} < 3.145520$$

となり，更に細かくして $\dfrac{1}{10000}$ にすると

$$3.14119052 < \text{円の面積} < 3.14199016$$

となる。最後の値は小数点 3 桁まで正しい事が分かる(2)。

定積分もこれとほぼ同様の考えから出発している。

今述べたことをきちんと書けば定積分の定義になる。ただし $f(x)>0$ の制限をはずす。

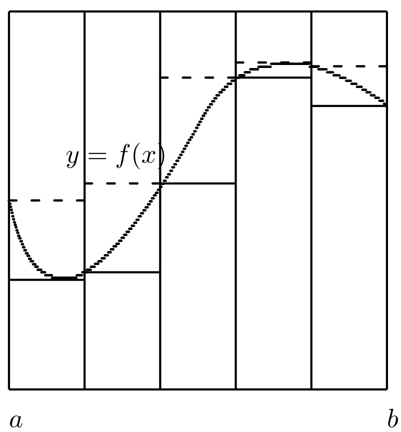

図 4.2

関数 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を考える。今 $f(x)>0$ を仮定しておこう。この関数のグラフと x 軸，直線 $x=a$ 及び直線 $x=b$ で囲まれた部分の面積 S を求める事を考える。図 4.2 の様に縦に

(1) この位になると目で見て数えるのは難しくなる。メッシュ幅を $\frac{1}{n}$ とする。$f_n(x)=\sqrt{n^2-x^2}$ とおくとき，円にすっぽり含まれる小正方形の数は $4\sum_{i=1}^{n}\lfloor f_n(i)\rfloor$ 一部でも含まれる小正方形の数は $4\sum_{i=0}^{n-1}\lceil f_n(i)\rceil$ となる。ただし，$\lfloor x\rfloor$ は x を越えない最大の整数を表し，$\lceil x\rceil$ は x 以上である最小の整数を表す。

(2) 理論的な議論には，ここで紹介した方法ではなく，正多角形で円を中と外から近似していく方法がとられた。円の面積が半径の 2 乗に比例するという事の証明もこの方法でなされた。

短冊形に分割する。関数のグラフより下にある短冊部分 (図 4.2 では実線部の短冊) の面積の和を $S_{下}$ とする。関数のグラフをすっぽり含む短冊部分 (図 4.2 では破線部と実線部を併せた短冊) の面積の和を $S_{上}$ とする。このとき

$$S_{下} \leqq S \leqq S_{上}$$

が得られる。ここで分割を細かくして行き，その極限を考える。$S_{下}$ の極限と $S_{上}$ の極限が一致すれば，それは S とも一致するので S が求まる。

定義 4.1 $y = f(x)$ を区間 $[a, b]$ で定義された**有界な**関数とする。ここで有界な関数とはある実数 M が存在して，任意の x に対し $|f(x)| \leqq M$ となるものをいう。即ち関数の値がいくらでも大きくなったり，いくらでも小さくなったりしない関数である。

区間 $[a, b]$ の**分割** Δ とは数の集合であり，$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ と書いたとき，$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$ を満たすものをいう。各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に対し，この小区間における関数 f の上限を M_i，下限を m_i と書く。即ち，$M_i = \sup\{\, f(x) \mid\ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \,\}$, $m_i = \inf\{\, f(x) \mid\ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \,\}$ とする。f が連続関数の場合はこれは小区間におるけ最大値・最小値にあたる。分割 Δ に対し $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ とする。また

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \qquad s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

とする (以前の $S_{下}$, $S_{上}$ に対応するもの)。分割 Δ の最大幅を $\|\Delta\|$ とする。即ち

$$\|\Delta\| = \max\{\, \Delta x_i \mid\ i = 1, \ldots, n \,\}$$

である。$\|\Delta\| \to 0$ は分割が一様に細かくなる事を意味する。分割を一様に細かくしたときの $S(\Delta)$ の極限値と $s(\Delta)$ の極限値が一致するとき，即ち

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} S(\Delta) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} s(\Delta)$$

となるとき，f は $[a, b]$ で **(定) 積分可能** (*integrable*) であるといい，この極限値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書く。

テキストの定義は定義 4.1 とは異なっているのでそれも紹介しておこう。2 つの定義は同値である事が分かる (命題 4.3)。

定義 4.2 f を区間 $[a, b]$ で定義された有界な関数とする。分割等は定義 4.1 と同じとする。

各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に対し，この小区間から任意に点 ξ_i を選んでおく。

分割 Δ に対し $\Sigma(\Delta; \{\xi_i\}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ とおく。$\Sigma(\Delta; \{\xi_i\})$ は**リーマン和** (*Riemann sum*) と呼ばれる。分割を一様に細かくしていったとき，$\Sigma(\Delta; \{\xi_i\})$ が $\{\xi_i\}$ の選び方によらず同じ極限値に収束するとき f は $[a, b]$ で **(定) 積分可能** (*integrable*) であるという。この極限値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書く。

定義 4.2 を見ると積分記号を現在の様に書くかが分かるかもしれない。

$$\Sigma(\Delta;\{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \longmapsto \int_a^b f(x)dx$$

命題 4.3 $[a,b]$ で定義された関数 f が定義 4.1 の意味で積分可能なら定義 4.2 の意味でも積分可能であり，逆も成立する。積分可能のときそれぞれの極限値 ($\int_a^b f(x)dx$ と書かれたもの) は等しい。

略証

$$s(\Delta) \leqq \Sigma(\Delta;\{\xi_i\}) \leqq S(\Delta)$$

が成立するので，定義 4.1 の意味で積分可能のとき定義 4.2 の意味でも積分可能で値は等しい。

逆は少し細工が必要である。$\Sigma(\Delta;\{\xi_i\})$ がリーマン和 $s(\Delta)$ に十分近くなるように，ξ_i を取れる事が分かる[(3)]。同様にリーマン和 $\Sigma(\Delta;\{\xi_i'\})$ が $S(\Delta)$ に十分近くなるように ξ_i' が取れる事が分かる。結局任意の正数 ε に対し ξ_i, ξ_i' を適当に取ると

$$\Sigma(\Delta;\{\xi_i\}) - \varepsilon \leqq s(\Delta) \leqq S(\Delta) \leqq \Sigma(\Delta;\{\xi_i'\}) + \varepsilon$$

が成立する。ここで極限をとる。定義 4.2 の極限値を α と置くと

$$\alpha - \varepsilon \leqq \lim_{\|\Delta\|\to 0} s(\Delta) \leqq \lim_{\|\Delta\|\to 0} S(\Delta) \leqq \alpha + \varepsilon$$

が得られる。ε は任意だったので，

$$\alpha \leqq \lim_{\|\Delta\|\to 0} s(\Delta) \leqq \lim_{\|\Delta\|\to 0} S(\Delta) \leqq \alpha$$

が分かり定義 4.1 の意味でも，同じ極限値に収束する事が分かる。詳しくは参考文献[(4)]を参考の事。 ∎

例 4.4 (1) $y = f(x) = x^2$ とし，定義域は $[0,1]$ とする。$\int_0^1 f(x)dx$ を求めてみよう。

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

という計算法は**まだ使う事ができない**。定義から分かるように積分は定義では微分とは何ら関係がないからである。定義 4.1 に基づいて計算しよう。

分割は等分割としよう，即ち $\Delta_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$ とする。$y = f(x) = x^2$ は単調増加なので，小区間 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ において最小値は $m_i = f\left(\frac{i-1}{n}\right)$，最大値は $M_i = f\left(\frac{i}{n}\right)$ である。

(3) 何故か?理由を考えよ。

(4) 高木貞治『解析概論』岩波，小平邦彦『解析入門』岩波

よって

$$
\begin{aligned}
S_n = S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

となり，$n \to \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \to 0$ となるので $S_n \to \dfrac{1}{3}$ となる。また

$$
\begin{aligned}
s_n = s(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \\
&= \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

となり，$n \to \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \to 0$ となるので $s_n \to \dfrac{1}{3}$ となる。両極限は一致するので $y = f(x) = x^2$ は $[0,1]$ で積分可能であり

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

となる。(高校時代にすでに学んでいる) 不定積分を使う方法に比べると，複雑であるし，求める関数ごとにそれに対応した和公式 (今の場合 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$) が必要になる。しかし微積分学成立以前の求積方 (面積を求める方法) はこの様であった。

(2) 次に積分不可能な例を考えよう。区間は $[0,1]$ で関数は次の様なものとする：$y = f(x)$ は x が有理数なら $f(x) = 0$，無理数なら $f(x) = 1$ となる関数とする。任意の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ を考える。任意の小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ において最小値は $m_i = 0$，最大値は $M_i = 1$ である。よって $\displaystyle s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$，$\displaystyle s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1$ である。2 つの極限値は一致しないので，この関数は積分可能でない。

演習問題 4.1　次の関数の定積分を定義に基づいて求めよ。ただし次の公式を用いる必要があるかもしれない。

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^3 dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

積分可能な関数として次のものが知られている。

定理 4.5

　連続関数は有界閉区間で積分可能である。
　単調関数は有界閉区間で積分可能である。

証明を理解するためには，$\varepsilon - \delta$ 法と呼ばれる極限の厳密な定義を理解していて更に一様連続という概念を理解している必要があるので，講義では証明は省略する。テキストの補足 §1.6 I に「連続なら一様連続」の証明を除いて証明が書いてある。