数理解析 II 要綱 #6

2004–12–14　河野

重積分の基本性質に関して確認しておこう。きちんと証明するには $\varepsilon-\delta$ 論法が必要になるので，証明概ねは省略する。

**定理 5.2** 2 重積分は次の性質を持つ。ただし積分領域は面積確定，被積分関数は積分可能を仮定する。

(1) [**線型性**]

1) $$\iint_D \{f(x,y)+g(x,y)\}\,dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$$

2) $$\iint_D \alpha f(x,y)dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy$$

(2) [**領域線型性**]

$$\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy - \iint_{D_1\cap D_2} f(x,y)dxdy$$

(3) [**単調性**] 任意の $(x,y)\in D$ に対し $f(x,y)\leqq g(x,y)$ となるとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy \leqq \iint_D g(x,y)dxdy$$

(4) [**単位の値**] 値が 1 である定数関数 $\tau$ と長方形領域 $D=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; a\leqq x\leqq b, c\leqq y\leqq d\right\}$ に対し

$$\iint_D \tau(x,y)dxdy = (b-a)(d-c)$$

今まで面積というものが始めから存在するもののように取り扱ってきた。しかし，理論的には不正確であった。面積というのは理論的には積分を用いて定義される。すなわち，$\boldsymbol{R}^2$ の有界閉領域 $D$ に対し，値が 1 である定数関数 $\tau$ が $D$ 上で積分可能のとき，$D$ は面積確定といい，その面積 $m(D)$ を

$$m(D) = \iint_D \tau(x,y)dxdy$$

で定義する。その上でこの $m$ が，面積に関して持っているであろうと今まで想定して来た性質を証明する事になる。この新しい面積の定義はいままでの素朴な定義 (長方形の面積は縦×横等) を含んでいる事が分かる。またすべての図形が面積を持つ分けではない事も分かる。面積をこの様に定義すると定理 5.2 (4) は次の形に拡張できる。

**(4')** [**単位の値**]

$$\iint_D \tau(x,y)dxdy = m(D)$$

また定理 5.2 (2) は次の様にも述べられる。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

**(2')** [**領域線型性**] 領域 $D_1, D_2$ に対し $m(D_1 \cap D_2) = 0$ のとき和集合 $D_1 \cup D_2$ を $D_1 + D_2$ と書く。

$$\iint_{D_1+D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

この方が**領域線型性**という用語にふさわしいかもしれない。証明は「面積 0 の領域上での積分が 0 になる」事から従う (演習問題 5.2 参照)。

**演習問題 5.2** 領域 $D$ が $m(D) = 0$ のとき $D$ 上で有界な任意の関数 $f$ に対し

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 0$$

が成立する。

**定理 5.3** [**重積分の平均値の定理**] $D$ は連結とする。連結とは $D$ 内の任意の 2 点が $D$ 内の曲線で結べることをいう。$f$ は $D$ で連続とする。このとき $D$ 内にある点 $P = (x_0, y_0)$ が存在して

$$\iint_D f dxdy = f(x_0, y_0)m(D)$$

となる。

**証明** $D$ は有界閉集合なので最大値 $M$ を与える点 $(x_1, y_1)$ と，最小値 $m$ を与える点 $(x_2, y_2)$ が存在する。このとき $D$ の任意の点 $(x, y)$ に対し $f(x_2, y_2) \leqq f(x, y) \leqq f(x_1, y_1)$ 即ち $m \leqq f(x, y) \leqq M$ が成立している。定理 5.2 (3) の単調性より $\displaystyle\iint_D mdxdy \leqq \iint_D f(x,y)dxdy \leqq \iint_D Mdxdy$ が分かる。定理 5.2 (4') より $\displaystyle\iint_D mdxdy = mm(D), \iint_D Mdxdy = Mm(D)$ となるので，$\mu = \dfrac{\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy}{m(D)}$ とおくと，$m \leqq \mu \leqq M$ である。$(x_1, y_1)$ と $(x_2, y_2)$ を結ぶ曲線を $C$ とすると，中間値の定理より $f(x_0, y_0) = \mu$ となる $C$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ が存在する。

## 5.2 累次積分

重積分を定義に基づいて計算するのは，例の計算を思い出せば分かるように，大変である。ここでは計算する方法として「累次積分」を紹介する。累次積分を標語的にいうと「2 重積分 = 1 変数積分 2 回」である。3 重積分の場合は「3 重積分 = 1 変数積分 3 回」，$n$ 重積分の場合は「$n$ 重積分 = 1 変数積分 $n$ 回」といえる。

最初に特別な形の領域に名前をつけておこう。領域 $D$ が次の様に表す事ができるとき**縦線型**と呼ぶ。: 実数 $a, b$ と $[a, b]$ で定義された連続関数 $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ が存在して

$$D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \right\}$$

と書ける。領域 $D$ が次の様に表す事ができるとき**横線型**と呼ぶ。: 実数 $c, d$ と $[c, d]$ で定義された連続関数 $x = h_1(y)$, $x = h_2(y)$ が存在して

$$D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y) \right\}$$

と書ける。

縦線型，横線型の領域は面積確定である。ある領域が縦線型でも横線型でもあるという場合もある。例えば円は縦線型かつ横線型である。例えば $D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq 1 \right\}$ とする。$D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2} \right\}$ となるので $D$ は縦線型である。また $D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq y \leqq 1, -\sqrt{1-y^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2} \right\}$ となるので横線型でもある。

**定理 5.4** $D$ は縦線型とする。即ち $D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \right\}$ とする。$f(x,y)$ は $D$ で定義された連続関数とする。このとき $D$ における $f$ の積分 (重積分) に対し次が成立する。

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx$$

また $D$ が横線型のとき，即ち $D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y) \right\}$ と書けるとき重積分に対し次が成立する。

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dx \right\} dy$$

定理の 2 つの式の左辺は重積分，右辺は 1 変数積分を 2 回している事に注意。重積分を 1 変数関数の積分 2 回 (累次積分) に正しく直す事ができる様になる事がここのポイントである。領域が長方形の場合次の様に簡単になる。

**系 5.5** $D$ を長方形領域，即ち $D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \right\}$ とする。このとき次が成立する。

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy$$

テキストでは

$$\int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$$

という表記法も用いているが，混乱をおこす場合があるので，この講義では採用しない。ただし各自がこの表記で計算する事を禁止するものではない。

重積分の計算の前に領域を図示する練習を行う。領域の図示は積分法の範囲ではないし，高校で扱っている。しかし昨年度の試験でも多数の学生が積分以前に領域の扱いが分からずにできていないという実態がある。そこで領域を図示する課題を取り上げる事にした。

例えば領域 $D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq 1, x \geqq 0, y-x \geqq 0, y \geqq 0 \right\}$ を図示せよという問題を考えてみる。ここで略記法を 1 つ入れておく。この例の様に

$$D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, f_1(x,y) \geqq 0, f_2(x,y) \geqq 0, \ldots, f_k(x,y) \geqq 0 \right\}$$

の様な集合がよく出てくる。この例でいうと，$f_1(x,y) = 1-(x^2+y^2), f_2(x,y) = x, f_3(x,y) = y-x, f_4(x,y) = y$ である。この領域 $D$ を

$$D = \{f_1(x,y) \geqq 0, f_2(x,y) \geqq 0, \ldots, f_k(x,y) \geqq 0\}$$

と略記することにする。

$D_1 = \{x^2 + y^2 \leqq 1\}$,$D_2 = \{x \geqq 0\}$,$D_3 = \{y - x \geqq 0\}$, $D_4 = \{y \geqq 0\}$ とおくと，$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4$ なので，各 $D_i$ がどのよう領域になるが考える。$D_1 = \{x^2 + y^2 \leqq 1\}$ は境界が曲線 $x^2 + y^2 = 1$ になっている。曲線で分けられている一方が $D_1$ であるが，それをチェックするために点 $(x_0, y_0)$ を選んで，$x_0^2 + y_0^2$ を計算してみる。$x_0^2 + y_0^2 > 1$ ならば $(x_0, y_0) \notin D_1$ が分かり，$x_0^2 + y_0^2 < 0$ なら $(x_0, y_0) \in D_1$ となる。以下 $D_2, D_3, D_4$ に関しても同様に考え，その共通部分をとれば $D$ が得られる。図より，この例の場合 $y \geqq 0$ の条件はいらない事が分かる。即ち，$D = \{x^2 + y^2 \leqq 1, x \geqq 0, y - x \geqq 0\}$ である。

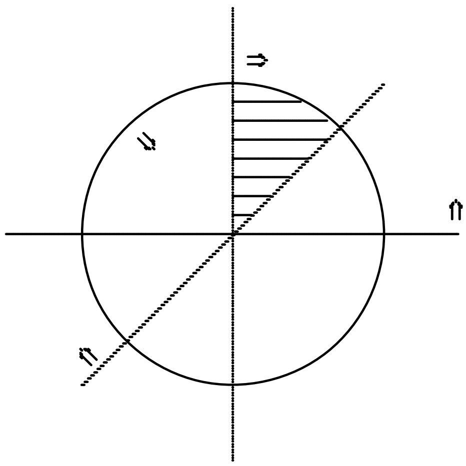

図 5.2

**演習問題 5.3**　次のそれぞれに対し領域 $D, E$ を図示せよ。

(1) $D = \{x^2 - 1 \leqq y \leqq x + 1\}$, $E = \left\{x^4 - 2x^2 \leqq y \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}x - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right\}$

(2) $D = \{0 \leqq x \leqq \pi, 0 \leqq y \leqq \pi\}$, $E = \{\,(x, y) \in D \mid\ \sin(x + y) \geqq 0\}$

(3) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とする。ただし $r \geqq 0$ とする (極座標表示)。$D$ を $r\theta$–平面内の領域 $D = \left\{(r, \theta) \,\middle|\, 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right\}$ とし，$E$ を $D$ に対応する $xy$–平面内の領域とする。

(4) $D = \{x^2 + |y| \leqq 1\}, E = \{y + |x| \leqq 0, x^2 + y^2 \leqq 1\}$

例をいくつか計算してみよう。

**例 5.6** $I = \displaystyle\iint_D x^2 y dxdy$ $(D = \{\,(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid\ x \geqq 0, y \geqq 0, x + y \leqq 1\,\})$ を考える。$D$ は縦線型とも横線型とも見る事ができるので 2 通りの計算を実行しよう。**注意**：重積分の計算のときは積分領域を**必ず図示する事**!! 縦線型と見ると $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1 - x$ となるので,

$$I = \iint_D x^2 y dxdy = \int_0^1 \left\{\int_0^{1-x} x^2 y dy\right\} dx$$

という累次積分の形にできる。後は 1 変数の積分を実行すればよい。実行すると

$$I = \int_0^1 \left\{\left[\,\frac{1}{2}x^2 y^2\,\right]_{y=0}^{1-x}\right\} dx = \int_0^1 \left\{\frac{1}{2}x^2(1 - x)^2\right\} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^4\right) dx = \frac{1}{60}$$

となる。変数が 2 つあるため，定積分の計算の代入のとき間違った変数に代入する事がある。そのために $\left[\dfrac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{1-x}$ という記号を採用した。

$D$ を横線型と見做して同様の計算ができる。$0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq x \leqq 1-y$ なので，

$$I = \iint_D x^2 y dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-y} x^2 y dx \right\} dy$$

となり，

$$I = \int_0^1 \left\{ \left[\frac{1}{3}x^3 y\right]_{x=0}^{1-y} \right\} dy = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{3}(1-y)^3 y \right\} dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \left\{ y - 3y^2 + 3y^3 - y^4 \right\} dy = \frac{1}{60}$$

を得る。

2 重積分を累次積分で計算するとき，領域が縦線型かつ横線型であれば，$x$ と $y$ のどちらを先に積算してもよい。しかし計算の複雑さが大きく変わる場合がある。$x$ を先に計算して複雑になってしょうがないときは，$y$ を先に計算してみるのも 1 つの方法である。この様に例は後で取り扱う。

**演習問題 5.4**　次の重積分について考える。ただし $D$ は $y = x + 1$ と $y = x^2 - 1$ で囲まれる領域とする。

$$I = \iint_D (x+y) dxdy$$

(1) 領域 $D$ を図示せよ。
(2) 重積分 $I$ を $y$ を先に積分する形の累次積分で表し，その後 $I$ を求めよ。
(3) 重積分 $I$ を $x$ を先に計算する形の累次積分で表すために, 領域 $D$ を 2 つの領域 $D_1, D_2$ に分け，それぞれの領域での積分を $x$ を先にする形の累次積分で表せ。この方法で $I$ を計算せよ。

**演習問題 5.5**　次の重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D x dxdy \quad D = \{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\}$　　ただし $a > 0, b > 0$ とする。
(2) $\displaystyle\iint_D \{x+y\} dxdy \quad D = \{x^2 \leqq y \leqq x+2\}$
(3) $\displaystyle\iint_D \left\{2x^2 + 3y^3\right\} dxdy \quad D = \{x^2 + y^2 \leqq a^2\}$　　ただし $a > 0$ とする。
(4) $I = \displaystyle\iint_D |\sin(x+y)| dxdy$ $(D = \{0 \leqq x, 0 \leqq y, x+y \leqq 2\pi\})$

**演習問題 5.6**　次の重積分について考える。ただし $D = \{0 \leqq y \leqq x \leqq 1\}$ とする。

$$I = \iint_D e^{-x^2} dxdy$$

(1) 領域 $D$ を図示せよ。
(2) $D$ をを横線形 $(\{\,(x,y) \mid\ c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)\,\}$ の形のもの) の形で表せ。
(3) 重積分 $I$ を $x$ を先に計算する形の累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。
(4) $D$ を縦線形 $(\{\,(x,y) \mid\ a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\,\}$ の形のもの) の形で表せ。

(5) 重積分 $I$ を $y$ を先に積分する形の累次積分で表せ。
(6) $I$ を求めよ。

演習問題 5.6 を見ると，累次積分の順序変更が可能であり，その事をを利用してそのままでは困難な積分が求まる場合がある事が分かる。

次の累次積分を考える。

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_y^1 \exp(-x^2) dx \right\} dy$$

このままでは，不定積分が求まらないためこの計算を実行する事は困難である。この積分を一旦重積分だと考えると

$$I = \iint_D \exp(-x^2) dxdy \qquad D = \{0 \leqq y \leqq 1, y \leqq x \leqq 1\}$$

となる。領域 $D$ を横線領域と考えて累次積分に直すと最初の積分になるが，縦線領域と考えると $D = \{0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x\}$ となるので，

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_0^x \exp(-x^2) dy \right\} dx$$

と変形できる。結局

$$\int_0^1 \left\{ \int_y^1 \exp(-x^2) dx \right\} dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^x \exp(-x^2) dy \right\} dx$$

となる。この事を**累次積分の順序変更**という。積分の順序変更を確実に実行するには 1 変数積分の積分範囲の変更をきちんと押える事が大切である。このために必ず重積分の積分領域を図示する事。

**演習問題 5.7**　次の積分の順序を変更せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y) dy \right\} dx$　　(2) $\displaystyle\int_a^x \left\{ \int_a^y f(t,y) dt \right\} dy$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \left\{ \int_{x-1}^{x+1} f(x,y) dy \right\} dx$

**演習問題 5.8**　次の積分の順序を変更する事により，累次積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\sqrt{x^2+y^2} dy \right\} dx \ (a > 0)$　　(2) $\displaystyle\int_1^e \left\{ \int_0^{\log x} \frac{1+y}{x} dy \right\} dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^{t^2} t\cos(1-x)^2 dx \right\} dt$