

5.5 3重積分

n 変数関数に関する積分は n 重積分と呼ばれる。本質的には 2 重積分と同じであるが記述は少し複雑になる。ここでは 3 重積分に関してあつかう。

(1) 定義と性質 最初に直方体領域 $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}$ で定義された有界な関数 $f(x, y, z)$ に関する定積分を定義する。 E の分割

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_\ell; y_0, y_1, \dots, y_m; z_0, z_1, \dots, z_n\}$$

とは $a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_\ell = b_1, a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2, a_3 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = b_3$ を満たすものをいう。このとき $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ とする。 $\max\{\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k \mid i = 1, \dots, \ell, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n\}$ を分割の最大幅といい $\|\Delta\|$ で表す。分割 Δ に対し

$$\begin{aligned} M_{ijk} &= \max\{f(x, y, z) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, z_{k-1} \leq z \leq z_k\} \\ m_{ijk} &= \min\{f(x, y, z) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, z_{k-1} \leq z \leq z_k\} \end{aligned}$$

と置き,

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n M_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \\ s(\Delta) &= \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n m_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \end{aligned}$$

とする。 $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(\Delta) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} s(\Delta)$ となるとき, $f(x, y, z)$ は E で積分可能であるといい, この極限値を

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz$$

と書く。

一般の有界閉領域 D に対しては次の様に定義する。 $D \subseteq E$ となる直方体領域 E をとる。 $f(x, y, z)$ に対し $f_E(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & (x, y, z) \in D \\ 0 & (x, y, z) \notin D \end{cases}$ と定義する。 f_E が E で積分可能のとき, f は D で積分可能であるといい,

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f_E(x, y, z) dx dy dz$$

で定義する。

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

有界閉領域 D に対し定数関数 1 が D で積分可能のとき、領域 D は体積確定といい、 $\mu(D) = \iiint_D dx dy dz$ をその体積と定義する。以下領域はすべて体積確定とする。

3重積分に関しても2重積分と同じ性質が成り立つ。

定理 5.11 3重積分は次の性質を持つ。ただし積分領域は体積確定、被積分関数は積分可能を仮定する。

(1) [線型性]

$$1) \iiint_D (f + g) dx dy dz = \iiint_D f dx dy dz + \iiint_D g dx dy dz$$

$$2) \iiint_D \alpha f dx dy dz = \alpha \iiint_D f dx dy dz$$

(2) [領域線型性] 領域 D_1, D_2 に対し $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$ のとき和集合 $D_1 \cup D_2$ を $D_1 + D_2$ と書く。ただし $\mu(X)$ は領域 X の体積とする。

$$\iiint_{D_1 + D_2} f dx dy dz = \iiint_{D_1} f dx dy dz + \iiint_{D_2} f dx dy dz$$

(3) [単調性] 任意の $(x, y, z) \in D$ に対し $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ となるとき

$$\iiint_D f dx dy dz \leq \iiint_D g dx dy dz$$

(2) 累次積分 $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z), h_1(z) \leq y \leq h_2(z), a \leq z \leq b\}$ となっているとき、

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \int_{h_1(z)}^{h_2(z)} \left\{ \int_{g_1(y, z)}^{g_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right\} dy \right\} dz$$

となる。領域の表し方によって積分順序が変わることは2重積分の場合と同様である。領域 D が $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y), h_1(x) \leq y \leq h_2(x), a \leq x \leq b\}$ という形で表されているときは

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left\{ \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dy \right\} dx$$

となる。他の場合も同様である。

標語的には「3重積分 = 1変数積分3回」という事ができる。「2重積分 = 1変数積分2回」であったから、「3重積分 = 2重積分 + 1変数積分」または「3重積分 = 1変数積分 + 2重積分」と見る事もできる。上の例で言うと $D(z) = \{(x, y) \mid g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z), h_1(z) \leq y \leq h_2(z)\}$ とするとき

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \iint_{D(z)} f(x, y, z) dx dy \right\} dz$$

であり, $E = \{(y, z) \in \mathbf{R}^2 \mid h_1(z) \leq y \leq h_2(z), a \leq z \leq b\}$ とおくと

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_E \left\{ \int_{g_1(y, z)}^{g_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right\} dy dz$$

となる。

例として球の体積を求めてみよう原点中心の半径 R の球を $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ とする。定数関数 1 を D で積分したものが球の体積である。

$$D = \{(x, y, z) \mid -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$$

となるので,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dx dy dz = \int_{-R}^R \left\{ \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \left\{ \int_{-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dz \right\} dy \right\} dx \\ &= \int_{-R}^R \left\{ \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy \right\} dx \end{aligned}$$

となる。ここでこの積分を 2 重積分に再び直す。 $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ とおくと

$$V = 2 \iint_E \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

である。2 変数の変数変換で極座標に変換する。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと,

$$V = 2 \int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} r \sqrt{R^2 - r^2} d\theta \right\} dr = 4\pi \int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} dr = \frac{4\pi R^3}{3}$$

となる

演習問題 5.12 次の積分値を求めよ。

$$(1) \iiint_D y dx dy dz \quad D = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

$$(2) \iiint_D z dx dy dz \quad D = \{0 \leq x \leq y^2, z \leq y \leq 2z, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$(3) \iiint_D z^2 dx dy dz \quad D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \quad (a, b, c > 0)$$

$$(4) \iiint_D (x + y^2 z) dx dy dz \quad S = \{0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, x \geq 0\}$$

(3) 変数変換 $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ という関係で, (x, y, z) -空間の領域 D と (u, v, w) -空間の領域 E が体積 0 の部分を除き 1 対 1 に対応しているとする。ヤコビ行列は

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

ヤコビ行列式 (ヤコビアン) は

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$$

である。このとき

$$\iint\int_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint\int_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

が成立する。

ここでは 3 次元の極座標表示を用いて、もう一度球の体積を求めてみよう。色々な置き方が考えられるが通常は次の形が用いられる。

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

ヤコビアンは $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$ となるので、

$$V = \iiint_D dx dy dz = \iiint_F r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

となる。ただし $F = \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ とする。よって

$$V = \int_0^R \left\{ \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\varphi \right\} d\theta \right\} dr = 2\pi \int_0^R \left\{ \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta \right\} dr = 4\pi \int_0^R r^2 dr = \frac{4\pi R^3}{3}$$

を得る。

演習問題 5.13 積分 $I = \iiint_D z^2 dx dy dz$ ($D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ ここで $a, b, c > 0$ とする) を考える (演習問題 5.12 (3) の問題)。

- (1) $x = au, y = bv, z = cw$ とおいて変数変換せよ。
- (2) さらに極座標に変換し積分を求めよ。

(4) 広義積分

(a) R^3 の部分集合の列 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ が次を満たすとき, D の近似増加列という。

- (1) 各 n に対し A_n は有界閉集合
- (2) 各 n に対し $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq D$
- (3) D に含まれる任意の有界閉集合 K に対し $K \subseteq A_n$ となる A_n

が存在する。

(b) まず $f(x, y, z) \geq 0$ の場合を考える。 $\{A_n\}$ を D の近似増加列とする。

$$I_n = \iiint_{A_n} f(x, y, z) dx dy dz$$

とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ が存在するとき, $f(x, y, z)$ は D で広義積分可能といい, この極限を

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

と表す。

(c) 一般の場合 $f(x, y, z)$ に対し $f_+(x, y, z) = \max\{f(x, y, z), 0\}$, $f_-(x, y, z) = -\min\{f(x, y, z), 0\}$ とおく。このとき $f_+(x, y, z) \geq 0$, $f_-(x, y, z) \leq 0$, $f(x, y, z) = f_+(x, y, z) - f_-(x, y, z)$ となっている。 $\iiint_D f_+(x, y, z) dx dy dz$, $\iiint_D f_-(x, y, z) dx dy dz$ が共に存在するとき (広義積分可能であるとき), $f(x, y, z)$ は D で広義積分可能といい

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f_+(x, y, z) dx dy dz - \iiint_D f_-(x, y, z) dx dy dz$$

で定義する。

関数が定符号の時広義積分は近似増加列の選び方によらない事は 2 変数関数の場合と同様である。

演習問題 5.14 $D = \{0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ のとき次の広義積分

$$I = \iiint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

を計算せよ。

5.6 物理量・体積

物理量を積分で表す事については 4.4 節で取り上げた。このときは 1 変数の積分までしか学んでいなかった。ここでは重積分を使ったものを扱う。原理は前と全く同じである。

前に述べたように 3 つの物理量 X, Y, Z の間に $Z = Y \times X$ の関係があるとき, 量 Z は一般に積分を用いて求める事ができる。 X という量が 1 次元的ではなく 2 次元的だと 2 重積分に, それ以上だと n 重積分になる。

「(体積)=(縦)×(横)×(高さ)」であるが, 4.4 節ではこれを「(体積)=(面積)×(高さ)」と見て体積を求めた。ここでは「(体積)=(高さ)×{(縦)×(横)}」と見て体積を求めよう。 D を xy -平面の有界な領域とする。 $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$ を D で定義された連続な関数とする。任意の $(x, y) \in D$ に対し $g(x, y) \leq f(x, y)$ が成立しているとする。このとき

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in D, g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$$

の体積 $\text{vol}(V)$ は

$$\text{vol}(V) = \iint_D \{f(x, y) - g(x, y)\} dx dy$$

で与えられる。

演習問題 5.15 半径 r の球の体積を求めよ。 $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ とし, $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, $g(x, y) = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ と考えよ。

「(体積)=1×{(高さ)×(縦)×(横)}」と見て計算する事もできる。そのときは \mathbf{R}^3 の有界な領域を V とすると V の体積 $\text{vol}(V)$ は

$$\text{vol}(V) = \iiint_D dx dy dz$$

で与えられる。

演習問題 5.16 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を上の方法で求めよ。

(質量)=(密度) \times (体積)の関係がある。3次元の領域 D をしめる物体の点 (x, y, z) における密度が $\mu(x, y, z)$ のとき、この物体の質量 K は

$$K = \iiint_D \mu(x, y, z) dx dy dz$$

で与えられる。この物体の x に関するモーメント M_x は $M_x = \iiint_D x\mu(x, y, z) dx dy dz$ で与えられる。 y, z にかんしても同様に $M_y = \iiint_D y\mu(x, y, z) dx dy dz, M_z = \iiint_D z\mu(x, y, z) dx dy dz$ となる。重心を (c_x, c_y, c_z) とすると、

$$c_x \iiint_D \mu(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D x\mu(x, y, z) dx dy dz$$

等の関係が成立する。

演習問題 5.17 一様な密度をもつ半球体 $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x \geq 0\}$ の重心の位置を求めよ。