数理解析 II 問題解説 #1

河野

演習問題 4.1　次の関数の定積分を定義に基づいて求めよ。ただし次の公式を用いる必要があるかもしれない。

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^3 dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

(1)　$\Delta_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ を区間 $[0,1]$ の n 等分を与える分割とする。即ち，$x_i = \dfrac{i}{n}$ とする。$y = x^3$ は $[0,1]$ では単調増加関数なので，小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ では $m_i = \inf\left\{ x^3 \,\middle|\, x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \right\} = x_{i-1}^3, M_i = \sup\left\{ x^3 \,\middle|\, x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \right\} = x_i^3$ となる。また $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{1}{n}$ なので

$$\begin{aligned} s(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n} \right)^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \\ &= \frac{1}{n^4} \left\{ \frac{(n-1)n}{2} \right\}^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} \right)^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 \\ &= \frac{1}{n^4} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。$\|\Delta_n\| = \dfrac{1}{n}$ なので $n \to \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \to 0$ となる。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s(\Delta_n) = \frac{1}{4} = \lim_{n\to\infty} S(\Delta_n)$ となるので，$y = x^3$ は $[0,1]$ で積分可能であり，

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

となる。

(2)　$\Delta_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ を区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ の n 等分を与える分割とする。即ち，$x_i = \dfrac{\pi i}{2n}$ とする。$y = \sin x$ は $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ では単調増加関数なので，小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ では $m_i = \inf\left\{ \sin x \,\middle|\, x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \right\} =$

$\sin x_{i-1}, M_i = \sup\{\ \sin x \mid\ \ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i\} = \sin x_i$ となる。また $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{\pi}{2n}$ なので

$$
\begin{aligned}
s(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi(i-1)}{2n}\right)\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}\frac{\cos\dfrac{\pi}{4n} - \cos\left\{\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2n}\right\}}{2\sin\dfrac{\pi}{4n}} \\
&= \frac{\dfrac{\pi}{4n}}{\sin\dfrac{\pi}{4n}}\left\{\cos\frac{\pi}{4n} - \cos\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n}\right\}\right\}
\end{aligned}
$$

となる。また

$$
\begin{aligned}
S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi i}{2n}\right)\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}\frac{\cos\dfrac{\pi}{4n} - \cos\left\{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2n}\right\}}{2\sin\dfrac{\pi}{4n}} \\
&= \frac{\dfrac{\pi}{4n}}{\sin\dfrac{\pi}{4n}}\left\{\cos\frac{\pi}{4n} - \cos\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n}\right\}\right\}
\end{aligned}
$$

となる。$\|\Delta_n\| = \dfrac{\pi}{2n}$ なので $n \to \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \to 0$ となる。$\lim\limits_{n\to\infty} s(\Delta_n) = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} S(\Delta_n)$ となるので，$y = \sin x$ は $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ で積分可能であり，

$$
\int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1
$$

となる。