数理解析 II 問題解説 #2

河野

演習問題 4.2　命題 4.5 を証明せよ。

分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ に対する f のリーマン和を $\Sigma_f(\Delta; \{\xi_i\})$，$g$ のリーマン和を $\Sigma_g(\Delta; \{\xi_i\})$，$f+g$ のリーマン和を $\Sigma_{f+g}(\Delta; \{\xi_i\})$ と表す。

(1) このとき

$$\Sigma_{f+g}(\Delta; \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} \{f(\xi_i) + g(\xi_i)\} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \Sigma_f(\Delta; \{\xi_i\}) + \Sigma_g(\Delta; \{\xi_i\})$$

となる。ここで $\|\Delta\| \to 0$ として極限をとれば $\displaystyle\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ が得られる。

af のリーマン和を $\Sigma_{\alpha f}(\Delta; \{\xi_i\})$ とするとき

$$\Sigma_{\alpha f}(\Delta; \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} \{\alpha f(\xi_i)\} \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \alpha \Sigma_f(\Delta; \{\xi_i\})$$

となる。ここで極限をとれば $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ が得られる。

(2) $\Delta_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ を $[a, c]$ の分割とし，$\Delta_2 = \{x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m\}$ を $[c, b]$ の分割とすると，$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_m\}$ は $[a, b]$ の分割になる。小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に対し ξ_i を定めておく。このとき $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=n+1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i$ が成立するが，$\|\Delta\| \to 0$ とするとき，$\|\Delta_1\| \to 0, \|\Delta_2\| \to 0$ となり，

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i \to \int_a^b f(x)dx, \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \to \int_a^c f(x)dx, \sum_{i=n+1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i \to \int_c^b f(x)dx$$

となるので

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx, + \int_c^b f(x)dx$$

が得られる。

(3) すでに示してあるが，もう一度示そう。各 ξ_i に対し $f(\xi_i) \leqq g(\xi_i)$ が成立しているので，$f(\xi_i)\Delta x_i \leqq g(\xi_i)\Delta x_i$ となる。これを加えて

$$\Sigma_f(\Delta; \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \Sigma_g(\Delta; \{\xi_i\})$$

を得る。極限をとると，

$$\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$$

が得られる。

(4) 任意の $x \in [a,b]$ に対し $\tau(x) = 1$ なので各 ξ_i に対し $\tau(\xi_i) = 1$ となる。$\Sigma_\tau(\Delta;\{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n}\tau(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b-a$ となる。極限をとる事により $\int_A^b \tau(x)dx = b-a$ が得られる。

演習問題 ***4.3** 関数 f と区間 $[a,b]$ に対し実数を対応される対応 $J(f,[a,b])$ が命題 4.5 の 4 つの性質を持つとき，この J は定義 4.1 で定義した積分と一致する事を示せ。

$[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ と実数からなるベクトル $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ に対し階段関数と呼ばれる関数 $m[\Delta,\boldsymbol{y}]$ を次の様に定義する；$x_{i-1} < x < x_i$ となる x に対しては $m[\Delta,\boldsymbol{y}](x) = y_i$, $m[\Delta,\boldsymbol{y}](x_0) = y_1$, $m[\Delta,\boldsymbol{y}](x_n) = y_n$, $m[\Delta,\boldsymbol{y}](x_i) = \min(y_{i-1}, y_i)$ とする。また $M[\Delta,\boldsymbol{y}]$ を次の様に定義する；$x_{i-1} < x < x_i$ となる x に対しては $M[\Delta,\boldsymbol{y}](x) = y_i$，$M[\Delta,\boldsymbol{y}](x_0) = y_1$, $M[\Delta,\boldsymbol{y}](x_n) = y_n$, $M[\Delta,\boldsymbol{y}](x_i) = \max(y_{i-1}, y_i)$ とする。このとき

$$\begin{aligned}\int_a^b m[\Delta,\boldsymbol{y}](x)dx &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} m[\Delta,\boldsymbol{y}](x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} y_i dx = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}J(m[\Delta,\boldsymbol{y}],[a,b]) &= \sum_{i=1}^{n} J(m[\Delta,\boldsymbol{y}],[x_{i-1},x_i]) = \sum_{i=1}^{n} J(y_i\tau,[x_{i-1},x_i]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i J(\tau,[x_{i-1},x_i]) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i\end{aligned}$$

となる。よって

$$\int_a^b m[\Delta,\boldsymbol{y}](x)dx = J(m[\Delta,\boldsymbol{y}],[a,b])$$

が成立する。$M[\Delta,\boldsymbol{y}]$ に関しても同様に

$$\int_a^b M[\Delta,\boldsymbol{y}](x)dx = J(M[\Delta,\boldsymbol{y}],[a,b])$$

が成立する事が分かる。

関数 f と $[a,b]$ の分割 Δ に対し $m_i = \inf\{\, f(x) \mid\ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \,\}$, $M_i = \sup\{\, f(x) \mid\ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \,\}$ とする。$\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_n)$, $\boldsymbol{M} = (M_1, \ldots, M_n)$ とおくとき，$g_\Delta = m[\Delta,\boldsymbol{m}]$, $h_\Delta = M[\Delta,\boldsymbol{M}]$ と定義すると，任意の $x \in [a,b]$ に対し

$$g_\Delta(x) \leqq f(x) \leqq h_\Delta(x)$$

が成立している。よって

$$J(g_\Delta[a,b]) \leqq J(f,[a,b]) \leqq J(h_\Delta,[a,b])$$

が成立する。

ここで $J(g_\Delta, [a,b]) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = s(\Delta)$ となり，$J(h_\Delta, [a,b]) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = S(\Delta)$ となる。よって

$$s(\Delta) \leqq J(f, [a,b]) \leqq S(\Delta)$$

が成立する。ここで $\|\Delta\| \to 0$ とすると，$s(\Delta), S(\Delta)$ 共に $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ に収束するので，

$$J(f, [a,b]) = \int_a^b f(x)dx$$

となる。