

演習問題 4.7 次の広義積分が収束するときは値を求めよ。

$$(1) \int_{-\infty}^0 e^x dx \qquad (2) \int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx \qquad (4) \int_0^{\infty} \cos x dx$$

(1) $I(N) = \int_N^0 e^x dx$ とおくと,

$$I(N) = \int_N^0 \{e^x\} dx = \left[e^x \right]_N^0 = 1 - e^N$$

となる。 $\lim_{N \rightarrow -\infty} I(N) = 1 - \lim_{N \rightarrow -\infty} e^N = 1$ なので, $\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$ である。

(2) $I(M) = \int_1^M \frac{1}{x(x+1)} dx$ とおくと

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_1^M \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_1^M \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right\} dx \\ &= \left[\log x - \log(x+1) \right]_1^M = \log M - \log(M+1) - \log 1 + \log 2 \\ &= \log \frac{M}{M+1} + \log 2 \end{aligned}$$

となる。 $\lim_{M \rightarrow \infty} I(M) = \lim_{M \rightarrow \infty} \log \frac{M}{M+1} + \log 2 = \log \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M}{M+1} \right) + \log 2 = \log 1 + \log 2 =$

$\log 2$ なので $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx = \log 2$ である。

(3) $I(M) = \int_0^M \frac{1}{4+x^2} dx$, $J(N) = \int_N^0 \frac{1}{4+x^2} dx$ とおく。 $t = \arctan \frac{x}{2}$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \frac{2}{4+x^2}$ であり, $\frac{dx}{dt} = \frac{4+x^2}{2}$ となる。 $T = \arctan \frac{M}{2}$ とおくと, $x: 0 \rightarrow M$ のとき $t: 0 \rightarrow T$ となる。 よって

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_0^M \frac{1}{4+x^2} dx = \int_0^T \frac{1}{4+x^2} \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^T \frac{1}{4+x^2} \frac{4+x^2}{2} dt = \int_0^T \frac{1}{2} dt = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

となる。 $M \rightarrow \infty$ のとき $T \rightarrow \frac{\pi}{2}$ となるので $\lim_{M \rightarrow \infty} I(M) = \frac{\pi}{4}$ となる。 $J(N)$ も同様に計算すると $\lim_{N \rightarrow -\infty} J(N) = \frac{\pi}{4}$ が分かる。 よって $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} I(M) + \lim_{N \rightarrow -\infty} J(N) = \frac{\pi}{2}$ となる。

(4) $I(M) = \int_0^M \cos x dx$ とおくと, $I(M) = \left[\sin x \right]_0^M = \sin M$ となる。 $\lim_{M \rightarrow \infty} I(M) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sin M$ は収束しない。

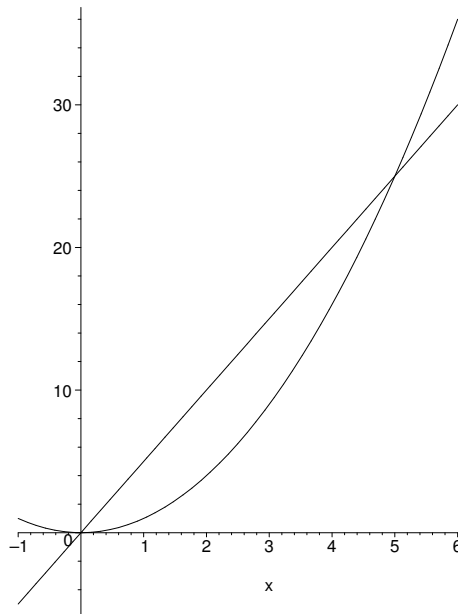
演習問題 4.8 半径 r の球の体積を求めよ。

半径 r の球の表面は $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ($-r \leq x \leq r$) を x 軸のまわりに 1 回転させたものなので,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r \\ &= \frac{4}{3} r^3 \end{aligned}$$

となる。

演習問題 4.9 $y = x^2$ と $y = 5x$ にはさまれる領域の面積を求めよ。またこの領域を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ。



曲線 $y = x^2$ と曲線 $y = 5x$ の交点の x 座標は $x = 0, 5$ である。この範囲では $5x \geq x^2$ なので求める面積を S とすると,

$$S = \int_0^5 (5x - x^2) dx = \left[\frac{5}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^5 = \frac{125}{6}$$

となる。この領域を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積を V とする。領域

$R_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5x\}$ を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積を V_1 ,

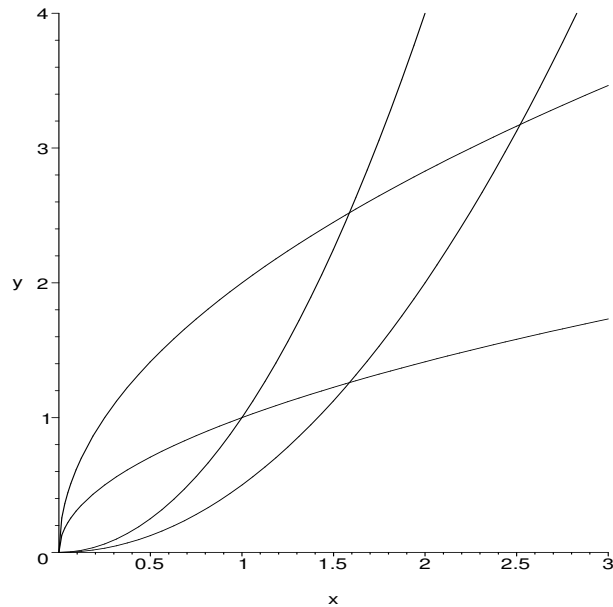
領域 $R_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq x^2\}$ を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積を

V_2 とすると, $V = V_1 - V_2$ である。 $V_1 = \pi \int_0^5 (5x)^2 dx = 25\pi \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^5 = \frac{3125\pi}{3}$ であり,

$V_2 = \pi \int_0^5 (x^2)^2 dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_0^5 = \frac{3125\pi}{5}$ なので, $V = V_1 - V_2 = \frac{1250\pi}{3}$

演習問題 4.10 次の問に答えよ。

- (1) m, n を自然数とする。 $k > 0$ に対し曲線 $y^m = kx^n$ ($x \geq 0$) を考える。この曲線上の 1 点から x 軸及び y 軸に下ろした垂線でできる長方形は, この曲線によって面積比 $m : n$ に分けられる事を示せ。
- (2) 2 つの放物線 $y^2 = 4ax$ ($a > 0$) と $x^2 = 4by$ ($b > 0$) で囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) 4 つの放物線 $y^2 = 4a_1x, y^2 = a_2x, x^2 = 4b_1y, x^2 = 4b_2y$ ($0 < a_1 < a_2, 0 < b_1 < b_2$) で囲まれる部分の面積を求めよ。



(1) 曲線上の点を (X, Y) とすると $Y = k^{\frac{1}{m}} X^{\frac{n}{m}}$ の関係がある。この点から x 軸, y 軸に垂線を下ろしてできる長方形の面積 S は $S = XY = k^{\frac{1}{m}} X^{\frac{n}{m}} X = k^{\frac{1}{m}} X^{\frac{n}{m}+1}$ である。曲線 $y^m = kx^n$ 及び x 軸, (X, Y) から x 軸に下ろした垂線で囲まれる部分の面積 S_1 は

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_0^X k^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}} dx = \left[k^{\frac{1}{m}} \frac{1}{\frac{n}{m} + 1} x^{\frac{n}{m}+1} \right]_0^X \\
 &= k^{\frac{1}{m}} \frac{m}{n+m} X^{\frac{n}{m}+1}
 \end{aligned}$$

となる。よって残りの部分の面積を S_2 とすると, $S_2 = S - S_1 = k^{\frac{1}{m}} \frac{n}{n+m} X^{\frac{n}{m}+1}$ となる。よって $S_1 : S_2 = m : n$ である。

(2) 2つの曲線の座標が正の部分における交点を (X, Y) とすると, $Y^2 = 4aX, X^2 = 4bY$ より $X = 4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}, Y = 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ となる。この点から x 軸, y 軸に下ろした垂線で囲まれる部分の面積 S_0 は $S_0 = XY = 16ab$ である。曲線 $x^2 = 4by$ 及び x 軸, (X, Y) から x 軸に下ろした垂線で囲まれる部分の面積 S_1 は (1) より $S_1 = \frac{S_0}{3}$ となる。曲線 $y^2 = 4ax$ 及び x 軸, (X, Y) から x 軸に下ろした垂線で囲まれる部分の面積 S'_2 は (1) より $S'_2 = \frac{2S_0}{3}$ となる。曲線 $y^2 = 4ax$ 及び y 軸, (X, Y) から y 軸に下ろした垂線で囲まれる部分の面積 S_2 は $S_2 = S_0 - S'_2 = \frac{S_0}{3}$ となる。曲線 $y^2 = 4ax$ 及び曲線 $x^2 = 4by$ に囲まれる部分の面積を S とすると, $S = S_0 - S_1 - S_2 = \frac{S_0}{3} = \frac{16}{3}ab$ となる。

(3) 曲線 $y^2 = 4a_1x$ と曲線 $x^2 = 4b_1y$ で囲まれる部分の面積を $S(1, 1)$ とすると, (2) より $S(1, 1) = \frac{16}{3}a_1b_1$ となる。曲線 $y^2 = 4a_1x$ と曲線 $x^2 = 4b_2y$ で囲まれる部分の面積を $S(1, 2)$ とすると, (2) より $S(1, 2) = \frac{16}{3}a_1b_2$ となる。曲線 $y^2 = 4a_2x$ と曲線 $x^2 = 4b_1y$ で囲まれる部分の面積を $S(2, 1)$ とすると, (2) より $S(2, 1) = \frac{16}{3}a_2b_1$ となる。曲線 $y^2 = 4a_2x$ と曲線 $x^2 = 4b_2y$ で囲まれる部分の面積を $S(2, 2)$ とすると, (2) より $S(2, 2) = \frac{16}{3}a_2b_2$ となる。求める部分の面積を S とすると $S = S(2, 2) - S(1, 2) - S(2, 1) + S(1, 1) = \frac{16}{3}(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$ となる。何故こうなるか図からきちんと理解する事。

演習問題 4.11 「(仕事)=(力) \times (移動距離)」という関係がある。バネが x 伸ばされたとき働く力は k を比例定数とすると, $F = kx$ であった。バネを x 伸ばすのに必要な仕事を求めよ。

仕事を W とすると

$$W = \int_0^x kx dx = \left[\frac{k}{2}x^2 \right]_0^x = \frac{k}{2}x^2$$

となる。

演習問題 4.12 一様な密度の半円板 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ の重心の座標を求めよ。

$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ とおき, D の重心を (X_G, Y_G) とすると, 対称性より $X_G = 0$ と考えられる。 $D(t) = D \cap \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 \mid -\infty < x < \infty\}$ とおく。 $D(t)$ の部分の質量がすべて点 $(0, t)$ にあると考える。 $D(t)$ の長さは $2\sqrt{1-t^2}$ なので, y 軸の $0 \leq y \leq 1$ の部分に置かれている銅線で y 座標が t の点における密度が $\mu(t) = 2\sqrt{1-t^2}$ であるような銅線の重心の位置が Y_G になる。質量 K は

$$K = \int_0^1 2\sqrt{1-t^2} dx$$

で与えられる。 $t = \sin u$ において変数変換を行うと $K = \frac{\pi}{2}$ が分かる。またモーメント M は

$$M = \int_0^1 2t\sqrt{1-t^2}dx$$

で与えられる。 $u = 1 - t^2$ において変数変換を行うと $M = \frac{2}{3}$ となる。重心 Y_G は $Y_G K = M$ となるので、 $Y_G = \frac{4}{3\pi}$ となる。

演習問題 4.13 一様な密度の材質でできている高さ h の円錐の重心は底面からどれくらいの所にあるか。

円錐の底面の半径を r とする。円錐を、円錐の頂点が原点にあり、底面が $y-z$ 平面に平行で x 軸の正の部分に来るようにおく。円錐と平面 $x = t$ の共通部分の面積は $\frac{\pi r^2}{h^2}t^2$ なので前問と同様に考えると、線密度 $\mu(x) = \frac{\pi r^2}{h^2}x^2$ の銅線が $0 \leq x \leq h$ にあり、その重心が円錐の重心の位置を与えると考えてよい。質量を K とすると、

$$K = \int_0^h \mu(x)dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^2 dx = \left[\frac{\pi r^2}{3h^2}x^3 \right]_0^h = \frac{\pi}{3}r^2h$$

となる。またモーメント M は

$$M = \int_0^h x\mu(x)dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^3 dx = \left[\frac{\pi r^2}{4h^2}x^4 \right]_0^h = \frac{\pi}{4}r^2h^2$$

となる。よって重心の位置を X_G とすると、 $X_G M = K$ なので $X_G = \frac{3}{4}h$ となる。底面は $x = h$ にあるので、重心は高さの $\frac{1}{4}$ の所にある事が分かる。

演習問題 *4.14 $(x(t), y(t))$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) が閉曲線るとき、即ち $(x(t_0), y(t_0)) = (x(t_1), y(t_1))$ のとき、この閉曲線で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)dt$$

である事を示せ。

部分積分法を用いると

$$-\int_{t_0}^{t_1} x'(t)y(t)dt = -\left[x(t)y(t) \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)dt$$

となる。ここで $x(t_0) = x(t_1), y(t_0) = y(t_1)$ より $\left[x(t)y(t) \right]_{t_0}^{t_1} = x(t_1)y(t_1) - x(t_0)y(t_0) = 0$ とな

るので, $-\int_{t_0}^{t_1} x'(t)y(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)dt$ となる。よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} x'(t)y(t)dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)dt \end{aligned}$$

を得る。

演習問題 4.15 $r = f(\theta) = 1 + \cos \theta$ と極座標表示されている曲線を心臓形 (cardioid) という。これについて次の問に答えよ。

- (1) この曲線の概形を書け。
- (2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

$r = f(\theta)$ と極座標表示されている点を x, y 座標で表現した点を $x(\theta)$ で表し, $x(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ とする。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ の関係があるので, $x(\theta) = (1 + \cos \theta) \cos \theta, y(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin \theta$ となっている。 $\cos \theta, \sin \theta$ は周期 2π の周期関数なので, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で曲線を描けばよい。また $(x(2\pi - \theta), y(2\pi - \theta)) = (x(\theta), -y(\theta))$ の関係があるので, $0 \leq \theta \leq \pi$ に対応する部分と $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ に対応する部分は x 軸に関して対称である。よって $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分を描いて, x 軸に関して折り返せば, 全体の曲線が得られる。

$x'(\theta) = -\sin \theta(1 + 2 \cos \theta), y'(\theta) = 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1$ となる。 $x'(\theta) = 0$ のとき $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}$ である。 $y'(\theta) = 0$ のとき $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi$ である。よって増減表は以下の様になる。

	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x'	0	-	-	-	0	+	0
x		←	←	←		→	
y'	+	+	0	-	-	-	0
y	↑	↑		↓	↓	↓	0
曲線	↑	↖	←	↙	↓	↘	

これで概形が分かるが, 1つ問題がある。 $x'(\theta) = (x'(\theta), y'(\theta)) = (0, 0)$ となる点を特異点と呼ぶが, 特異点では $x(\theta), y(\theta)$ が滑らかであっても, 曲線が尖る場合がある。そのチェックは講義では触れていない。特異点のまわりも含めきちんと曲線を描く問題は範囲外とするが, ここではそれに関しても述べておく。範囲外という事が分かる様に青字で書いておく。

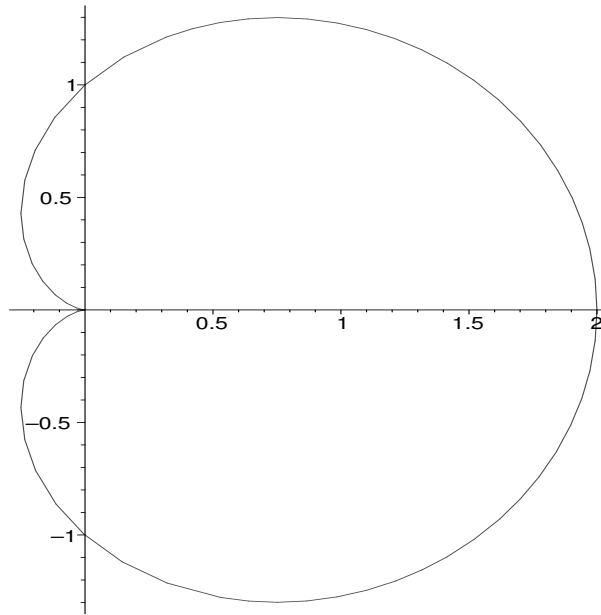
$\theta = \pi$ が特異点を与える。 $x'(\theta)$ において $\theta \rightarrow \pi$ とした時の $x'(\theta)$ の方向を見ればよいが, $\theta \rightarrow \pi$ としたとき長さが 0 になるので長さを修正し, $\frac{x'(\theta)}{|x'(\theta)|}$ の方向を考える。 $x'(\theta) = (x'(\theta), y'(\theta)) = (-\sin \theta(1 + 2 \cos \theta), 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1)$ なので, $|x'(\theta)|^2 = (x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = 2(1 + \cos \theta)$ と

なり,

$$\frac{x'(\theta)}{|x'(\theta)|} = \left(\frac{\sin \theta(1 + 2 \cos \theta)}{\sqrt{2(1 + \cos \theta)}}, \frac{(2 \cos \theta - 1)\sqrt{1 + \cos \theta}}{\sqrt{2}} \right)$$

が得られる。 $\theta \rightarrow \pi$ のとき $\frac{(2 \cos \theta - 1)\sqrt{1 + \cos \theta}}{\sqrt{2}} \rightarrow 0$ なので $\frac{\sin \theta(1 + 2 \cos \theta)}{\sqrt{2(1 + \cos \theta)}} \rightarrow 1$ となる。

よって極限では x' は x 軸と平行になっている。この事を考慮して図を描くと次図の様になる。



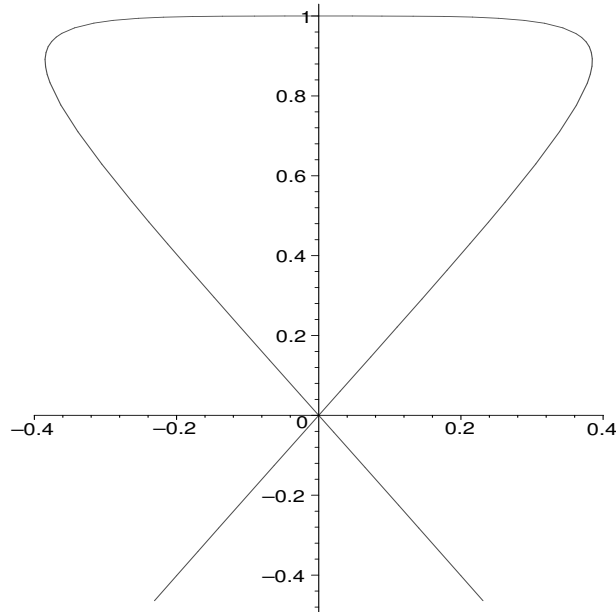
演習問題 4.16 $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$ でパラメータ表示された曲線について次の問に答えよ。

- (1) この曲線の概形を書け。
- (2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $x'(t) = 1 - 3t^2, y'(t) = -4t^3$ なので $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $x'(t) = 0, t = 0$ のとき $y'(t) = 0$ となる。よって増減表は次の様になる。

		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	-	0	+	+	+	0	-
x	←		→	→	→		←
y'	+	+	+	0	-	-	-
y	↑	↑	↑	0	↓	↓	↓
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙

これより曲線を描くと次図の様になる。



(2) 閉曲線になっているのは $t = -1$ から $t = 1$ の範囲である。 t が -1 から 1 へ動くとき、点 $(x(t), y(t))$ は領域の境界を時計回りに動く。よって求める面積を S とするとき、演習問題 4.14 を考慮すると

$$S = \int_1^{-1} (t - t^3)(-4t^3)dt$$

となる。この積分を計算して $S = \frac{16}{35}$ を得る。

ここでは点の方向を気にして 1 から -1 までの積分とした。方向を気にせず、例えば

$$\int_{-1}^1 (t - t^3)(-4t^3)dt$$

を計算してもよい。その場合計算結果がマイナスになるので、 t が -1 から 1 まで動くとき、点が半時計回り移動している事が分かる。求めた積分値の符号を変えたものが面積になる。

演習問題 4.17 演習問題 4.15 の曲線の長さを求めよ。

演習問題 4.15 で計算している様に $\mathbf{x}'(\theta) = (x'(\theta), y'(\theta)) = (-\sin\theta(1+2\cos\theta), 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1)$,
 $|\mathbf{x}'(\theta)|^2 = (x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = 2(1 + \cos\theta)$ なので曲線の長さを L とすると

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos\theta)}d\theta$$

となる。 $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$ なので

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 4 \int_0^{\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4 \left[2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} = 8 \end{aligned}$$

となる。 $\cos \frac{\theta}{2}$ は負の場合もあるので $\sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$ としないように。

演習問題 4.18 極座標表示された曲線 $r = f(\theta) = \sin^3 \frac{\theta}{3}$ の概形を書き，全長を求めよ。

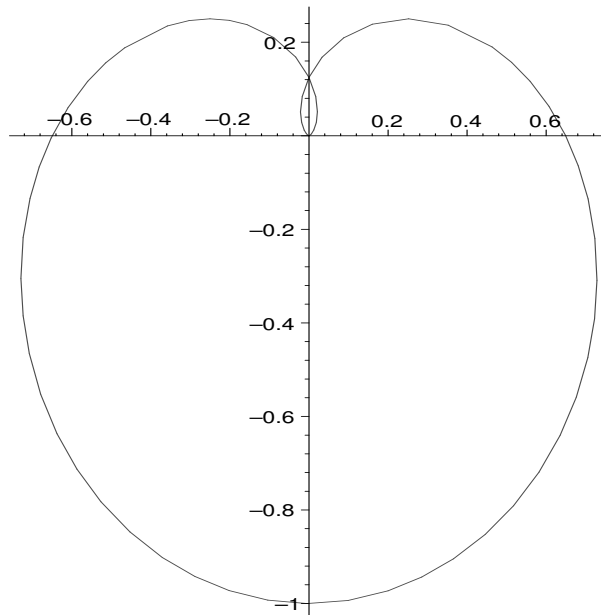
$r = f(\theta)$ と極座標表示されている点を x, y 座標で表現した点を $x(\theta)$ で表し， $x(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ とする。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ の関係があるので， $x(\theta) = \sin^3 \left(\frac{\theta}{3} \right) \cos \theta, y(\theta) = \sin^3 \left(\frac{\theta}{3} \right) \sin \theta$ となっている。 $\cos \theta, \sin \theta$ は周期 2π の周期関数なので， $\sin \left(\frac{\theta}{3} \right)$ は周期 6π の周期関数である。また $(x(3\pi + \theta), y(3\pi + \theta)) = (x(\theta), y(\theta))$ の関係があるので， $0 \leq \theta \leq 3\pi$ の範囲で曲線を描けばよい。導関数を計算すると

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= 3 \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3} \cdot \frac{1}{3} \cos \theta + \sin^3 \frac{\theta}{3} (-\sin \theta) \\ &= \sin^2 \frac{\theta}{3} \left\{ \cos \frac{\theta}{3} \cos \theta - \sin \frac{\theta}{3} \sin \theta \right\} \\ &= \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \left(\frac{\theta}{3} + \theta \right) = \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{4\theta}{3} \end{aligned}$$

となる。 $y(\theta)$ についても同様に計算すると $y'(\theta) = \sin^2 \frac{\theta}{3} \sin \frac{4\theta}{3}$ となる。 $\sin X = 0$ となるのは $X = n\pi$ (n は整数) であり， $\cos X = 0$ となるのは $X = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$ (n は整数) なので $x'(\theta) = 0$ となるのは $\theta = 0, \frac{3}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi, \frac{21}{8}\pi, 3\pi$ である。 $y'(\theta) = 0$ となるのは $\theta = 0, \frac{3}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{9}{4}\pi, 3\pi$ である。よって増減表は次のようになる。

	0		$\frac{3}{8}\pi$		$\frac{3}{4}\pi$		$\frac{9}{8}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$		$\frac{15}{8}\pi$		$\frac{9}{4}\pi$		$\frac{21}{8}\pi$		3π
x'	0	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	0
x		→		←	←	←		→	→	→		←	←	←		→	
y'	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0
y		↑	↑	↑		↓	↓	↓	0	↑	↑	↑		↓	↓	↓	
曲線		↗	↑	↖	←	↙	↓	↘	→	↗	↑	↖	←	↙	↓	↘	

$\theta = 0$ の点は特異点になるので，演習問題 4.15 と同様に調べる必要がある。この場合は尖った曲線にはならない事が分かる。証明は略すが，興味のあるものは証明を試みよ。増減表より曲線は次図のようになる。



全長を L とすると,

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = \sin^4 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{4\theta}{3} + \sin^4 \frac{\theta}{3} \sin^2 \frac{4\theta}{3} = \sin^4 \frac{\theta}{3}$$

なので

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^4 \frac{\theta}{3}} d\theta = \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\theta}{3} d\theta \\ &= \int_0^{3\pi} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\theta}{3} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{3}{2} \sin \frac{2\theta}{3} \right]_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

演習問題 4.19 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ の長さを求めよ。

\sqrt{x} があるので, $x \geq 0$ が必要である。また, 同様に $y \geq 0$ でもあるので, $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{y} \leq 1$ より, $x \leq 1$ となる。

曲線が $y = f(x)$ と表されているときは $t = x$ と考えると長さ L は

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

となる。 $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$ より $y = 1 - 2\sqrt{x} + x$ となる。よって $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ より $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 =$

$1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$ となる。よって

$$L = \int_0^1 \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}} dx$$

となる。 $x = t^2$ と変数変換すると $L = 2 \int_0^1 \sqrt{2t^2 - 2t + 1} dt$ となる。更に $u = t - \frac{1}{2}$ と変数変換すると、 $L = 2\sqrt{2} \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{u^2 + \frac{1}{4}} du$ となる。よって $L = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2})$ となる。