数理解析 II 問題解説 #5

河野

演習問題 5.1　次の定積分を定義に基づいて計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D xydxdy$　(ただし $D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 2, 0 \leqq y \leqq 2 \right\}$)

(2) $\displaystyle\iint_D x^2y^2dxdy$　(ただし $D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1 \right\}$)

(1) x に関しても y に関しても n 等分する分割を Δ_n とする。即ち $\Delta_n = \{x_0, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_n\}$ とおくとき，$x_i = \dfrac{2i}{n}, y_j = \dfrac{2j}{n}$ とする。小領域 $\Delta_{ij} = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \right\}$ における関数 $z = f(x,y) = xy$ の上界は，$y = f(x)$ が連続なので，最大値となる。$z = f(x,y)$ は x に関しても，y に関しても単調増加なので，最大値を与える点は小区間の右上の点 (x_i, y_j) である。よって $M_{ij} = f(x_i, y_j) = \dfrac{2i}{n} \cdot \dfrac{2j}{n} = \dfrac{4ij}{n^2}$ となる。下限は最小値となっているので同様に，$m_{ij} = f(x_{i-1}, y_{j-1}) = \dfrac{2(i-1)}{n} \cdot \dfrac{2(j-1)}{n} = \dfrac{4(i-1)(j-1)}{n^2}$ となる。$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{2}{n}$，$\Delta y_j = y_j - y_{j-1} = \dfrac{2}{n}$ となるので，

$$
\begin{aligned}
S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{4ij}{n^2}\frac{2}{n}\frac{2}{n} \\
&= \frac{16}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \frac{16}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{16}{n^4}\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= 4\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned}
$$

となる。$s(\Delta_n)$ も同様に計算して $s(\Delta_n) = 4\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$ を得る。分割の最大幅 $\|\Delta_n\| = \max\left\{ \Delta x_i, \Delta y_j \,\middle|\, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n \right\}$ は $\dfrac{2}{n}$ なので，$n \to \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \to 0$ となる。よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(\Delta_n) = 4 = \lim_{n\to\infty} s(\Delta_n)$ となるので，

$$
\iint_D xydxdy = 4
$$

となる。

(2) x に関しても y に関しても n 等分する分割を Δ_n とする。(1) と異なり区間幅は 1 なので，$\Delta_n = \{x_0, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_n\}$ とおくとき，$x_i = \dfrac{i}{n}, y_j = \dfrac{j}{n}$ となる。小領域 $\Delta_{ij} = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \right\}$ における関数 $z = f(x,y) = x^2y^2$ の上界は，$y = f(x)$ が連続なので，最大値となる。$z = f(x,y)$ は x に関しても，y に関しても単調増加なので，最大値を与える点は小区間の右上の点 (x_i, y_j) である。よって $M_{ij} = f(x_i, y_j) = \left(\dfrac{i}{n}\right)^2\left(\dfrac{j}{n}\right)^2 = \dfrac{i^2j^2}{n^4}$ となる。下限は最小値となっているので同様に，$m_{ij} = f(x_{i-1}, y_{j-1}) =$

$\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\left(\frac{j-1}{n}\right)^2 = \frac{(i-1)^2(j-1)^2}{n^4}$ となる。$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1} = \frac{1}{n}$ となるので,

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i^2j^2}{n^4}\frac{1}{n}\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^6}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2j^2 = \frac{1}{n^6}\sum_{i=1}^{n} i^2 \sum_{j=1}^{n} j^2 \\ &= \frac{1}{n^6}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{36}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

となる。$s(\Delta_n)$ も同様に計算して $s(\Delta_n) = \frac{1}{36}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(2-\frac{1}{n}\right)^2$ を得る。分割の最大幅 $\|\Delta_n\| = \max\{\,\Delta x_i, \Delta y_j \mid\ i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,n\,\}$ は $\frac{1}{n}$ なので，$n\to\infty$ のとき $\|\Delta_n\|\to 0$ となる。よって $\lim_{n\to\infty} S(\Delta_n) = \frac{1}{9} = \lim_{n\to\infty} s(\Delta_n)$ となるので,

$$\iint_D x^2y^2\,dxdy = \frac{1}{9}$$

となる。