数理解析 II 問題解説 #6

河野

演習問題 5.2　領域 D が $m(D)=0$ のとき D 上で有界な任意の関数 f に対し

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 0$$

が成立する。

$f(x,y)$ が積分可能である事は仮定する。$f(x,y)$ は有界であるから，定数 M,N が存在して，任意の $(x,y)\in D$ に対し

$$N \leqq f(x,y) \leqq M$$

が成立している。積分の線型性より

$$\iint_D N dxdy \leqq \iint_D f(x,y)dxdy \leqq \iint_D M dxdy$$

が成立するが，$\displaystyle\iint_D M dxdy = M\iint_D dxdy = Mm(D) = 0$, $\displaystyle\iint_D N dxdy = N\iint_D dxdy = Nm(D) = 0$ となるので，$\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = 0$ が得られる。

演習問題 5.3　次のそれぞれに対し領域 D,E を図示せよ。

(1) $D=\{x^2-1\leqq y\leqq x+1\}$, $E=\left\{x^4-2x^2\leqq y\leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}x-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right\}$
(2) $D=\{0\leqq x\leqq \pi, 0\leqq y\leqq \pi\}$, $E=\{\,(x,y)\in D\,|\ \sin(x+y)\geqq 0\,\}$
(3) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とする。ただし $r\geqq 0$ とする (極座標表示)。D を $r\theta$–平面内の領域 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\ 0\leqq r\leqq 1, 0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right\}$ とし，E を D に対応する xy–平面内の領域とする。
(4) $D=\{x^2+|y|\leqq 1\}, E=\{y+|x|\leqq 0, x^2+y^2\leqq 1\}$

講義中にも言いましたが，この問題は積分の範囲の問題ではありません。しかし領域の処理がきちんとできないと，重積分を累次積分に直すことはできないので，きちんと理解してください。(1)D のみ詳しく解説しておきます。

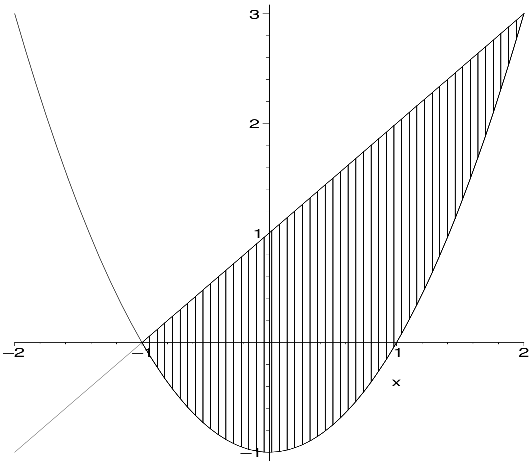
(1) $D=\{x^2-1\leqq y\leqq x+1\}$ の様に複数の不等式で定義されている領域はそれぞれの不等式で定義される領域の共通部分になる。即ち $D_1=\{x^2-1\leqq y\}$,$D_2=\{y\leqq x+1\}$ とおくとき

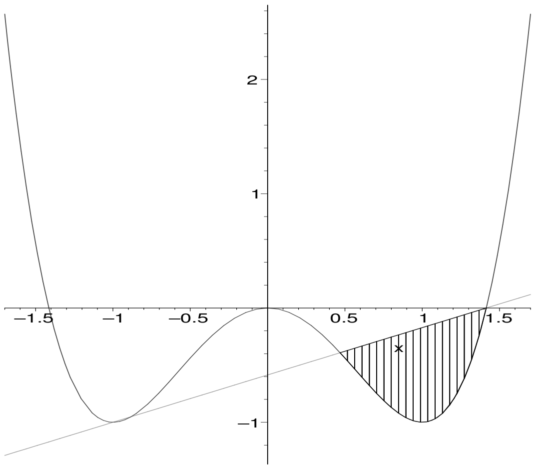
$$D=D_1\cap D_2$$

となる。$D_1=\{x^2-1\leqq y\}$ の境界は曲線 $y=x^2-1$ なので，D_1 はその曲線で分けられる領域の一方になっている。値を代入する等調べてみると，曲線の上側である事が分かる。D_2 も同様に調べると，曲線 $y=x+1$ の下側である事が分かる。よって求める領域は $y=x^2-1$ の上側と $y=x+1$ の下側の共通部分になる。

$$D=\left\{-1\leqq x\leqq 2,\ x^2-1\leqq y\leqq x+1\right\}$$

となるので，これを図示すると次の様になっている。



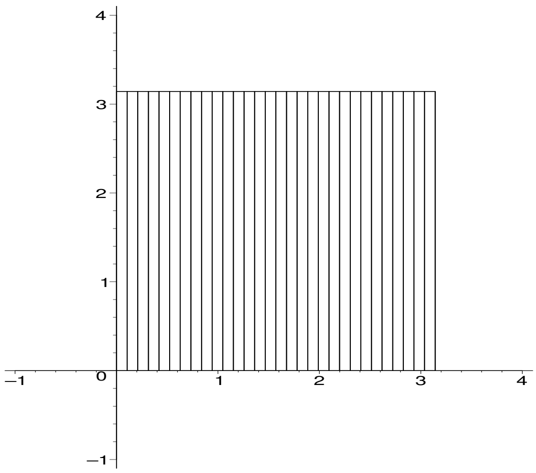


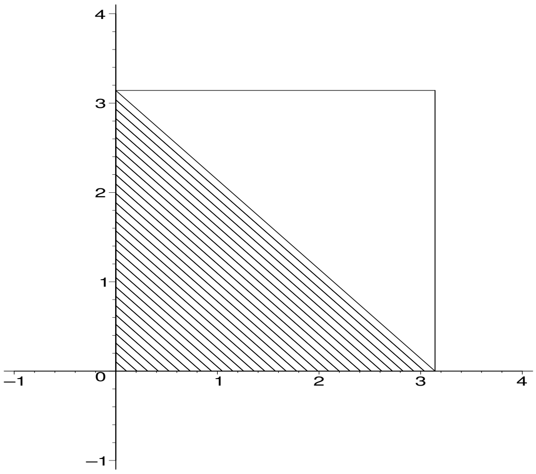
E は $E_1 = \{x^4 - 2x^2 \leqq y\}$ と $E_2 = \left\{ y \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}x - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \right\}$ の共通部分になる。$y = x^4 - 2x^2$ と $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}x - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ は $x = \sqrt{2}$ 及び $x = -1$ で交わるので，$x^4 - 2x^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}x - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ を変形して，$(x-\sqrt{2})(x+1)\left(x^2 + (\sqrt{2}-1)x - (\sqrt{2}-1)\right) = 0$ よって 2 曲線の交点の x 座標は $x = -1, \sqrt{2}, \dfrac{-(\sqrt{2}-1) \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$ となる。以上により

$$E = \left\{ \frac{-(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \leqq x \leqq \sqrt{2},\ x^4 - 2x^2 \leqq y \leqq \frac{1}{\sqrt{2}+1}x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \right\}$$

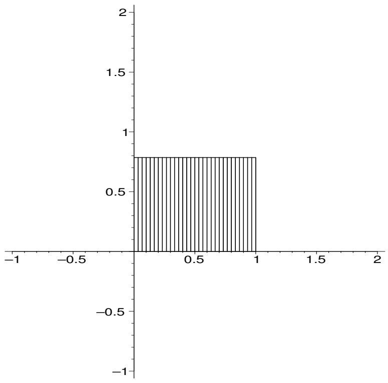
となる。

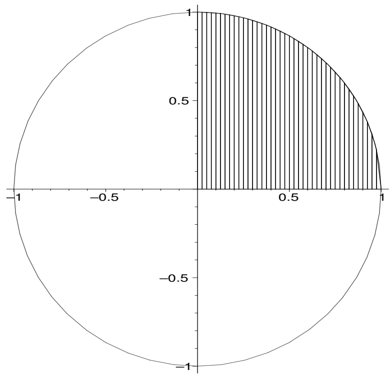
(2) D は長方形領域なので図示は簡単である。E はそのなかで $\sin(x+y) \geqq 0$ となる領域である。$E_1 = \{\sin(x+y) \geqq 0\}$ とすれば $E = D \cap E_1$ なので，E_1 を求める。$\sin X \geqq 0$ という条件は「$2n\pi \leqq X \leqq (2n+1)\pi$ (n は整数)」という条件と同値なので $2n\pi \leqq x+y \leqq (2n+1)\pi$ となる。D と共通部分を持つのは $n=0$ のときと $n=1$ の時である。$n=0$ のときは $0 \leqq x+y \leqq \pi$ という条件になる。$n=1$ のときは $2\pi \leqq x+y \leqq 3\pi$ なので $x=\pi, y=\pi$ になる。よって領域は図の様になる。





(3) D は $r\theta$–平面では長方形領域になっている。D はそれを (x,y) の極座標表示とみなしたものなので，半径 1 の円の内部で，偏角が 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ までの点の集合である。次図は間違っています。どこが間違っているかは明白なので，そのままの図にしておきます。





(4) 絶対値は場合分けです。$y \geqq 0$ のとき $x^2+|y|=x^2+y$ となり，$y<0$ のとき $x^2+|y|=x^2-y$ となるので，

$$D=\{y \geqq 0, x^2+y \leqq 1\} \cap \{y<0, x^2-y \leqq 1\}$$

となる。よって

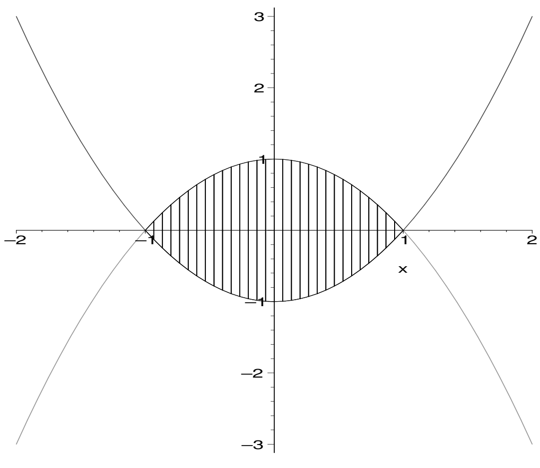
$$D=\{-1 \leqq x \leqq 1, x^2-1 \leqq y \leqq 1-x^2\}$$

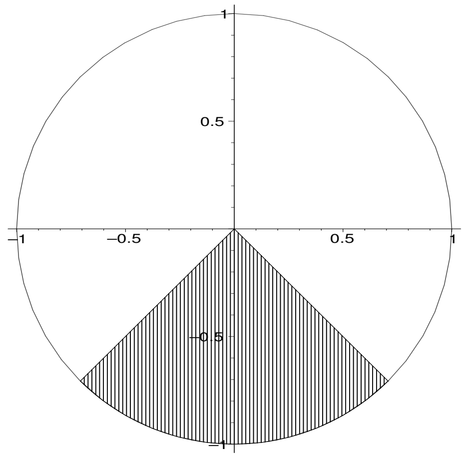
となる。

$x \geqq 0$ のとき $y+|x|=y+x$ となり，$x<0$ のとき $y+|x|=y-x$ となるので，

$$E=\{x \geqq 0, y+x \leqq 0, x^2+y^2 \leqq 1\} \cap \{x<0, y-x \leqq 0, x^2+y^2 \leqq 1\}$$

となる。





演習問題 5.4　次の重積分について考える。ただし D は $y=x+1$ と $y=x^2-1$ で囲まれる領域とする。

$$I=\iint_D (x+y)dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表し，その後 I を求めよ。
(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表すために, 領域 D を 2 つの領域 D_1, D_2 に分け，それぞれの領域での積分を x を先にする形の累次積分で表せ。この方法で I を計算せよ。

(1) 前問 (1) の D が答になっている。
(2) $D=\left\{-1\leqq x\leqq 2, x^2-1\leqq y\leqq x+1\right\}$ なので

$$I=\iint_D (x+y)\,dxdy=\int_{-1}^{2}\left\{\int_{x^2-1}^{x+1}(x+y)\,dy\right\}dx$$

となる。

$$\begin{aligned}\int_{x^2-1}^{x+1}(x+y)\,dy &= \left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=x^2-1}^{x+1}\\ &= x^2+2x-x^3+\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{(x^2-1)^2}{2}\end{aligned}$$

なので

$$I=\int_{-1}^{2}\left\{x^2+2x-x^3\right\}dx+\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{(x^2-1)^2}{2}=\frac{99}{20}$$

となる。
(3) D を横線型 $\{c\leqq y\leqq d, h_1(y)\leqq x\leqq h_2(x)\}$ で表そうとした場合 $h_1(y)$ の形が $y\geqq 0$ と $y<0$ で変わってしまうため $y=0$ の部分で 2 つに分ける。 $D_1=D\cap\{y\leqq 0\}$,$D_2=D\cap\{y\geqq 0\}$ とおくと $D=D_1+D_2$ となっている。このとき

$$D_1=\left\{-1\leqq y\leqq 0, -\sqrt{y+1}\leqq x\leqq \sqrt{y+1}\right\}, D_2=\left\{0\leqq y\leqq 3, y-1\leqq x\leqq \sqrt{y+1}\right\}$$

と表されるので

$$\begin{aligned}I &= \iint_{D_1}(x+y)\,dxdy+\iint_{D_2}(x+y)\,dxdy\\ &= \int_{-1}^{0}\left\{\int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}}(x+y)\,dx\right\}dy+\int_{0}^{3}\left\{\int_{y-1}^{\sqrt{y+1}}(x+y)\,dx\right\}dy\\ &= \int_{-1}^{0}\left\{2y\sqrt{y+1}\right\}dy+\int_{0}^{3}\left\{\frac{y}{2}+\frac{1}{2}-\frac{(y-1)^2}{2}+y\left(\sqrt{y+1}-y+1\right)\right\}dy\\ &= -\frac{8}{15}+\frac{329}{60}=\frac{99}{20}\end{aligned}$$

となる。この積分を (3) の方法で計算する事はないと思われますが，ここでは累次積分の練習として，両方で計算しました。

演習問題 5.5　次の重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D xdxdy \quad D=\{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leqq 1, x\geqq 0, y\geqq 0\}$　ただし $a>0, b>0$ とする。

(2) $\displaystyle\iint_D \{x+y\}\,dxdy \quad D=\{x^2\leqq y\leqq x+2\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \left\{2x^2+3y^3\right\}dxdy \quad D=\{x^2+y^2\leqq a^2\}$　ただし $a>0$ とする。

(4) $\displaystyle I=\iint_D |\sin(x+y)|dxdy\ (D=\{0\leqq x, 0\leqq y, x+y\leqq 2\pi\})$

(1) 領域 D は $D=\left\{0\leqq x\leqq a, 0\leqq y\leqq b-\dfrac{b}{a}x\right\}$ と書けるので

$$\begin{aligned}\iint_D xdxdy &= \int_0^a\left\{\int_0^{b-\frac{b}{a}x} xdy\right\}dx\\ &= \int_0^a x\left(b-\frac{b}{a}x\right)dx\\ &= \frac{1}{6}ba^2\end{aligned}$$

となる。

(2) 領域 D は $D=\left\{-1\leqq x\leqq 2, x^2\leqq y\leqq x+2\right\}$ と書けるので

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)\,dxdy &= \int_{-1}^2\left\{\int_{x^2}^{x+2}(x+y)\,dy\right\}dx\\ &= \int_{-1}^2\left(x(x+2-x^2)+\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{x^4}{2}\right)dx\\ &= \frac{189}{20}\end{aligned}$$

(3) 領域 D は $D=\left\{-a\leqq x\leqq a, -\sqrt{a^2-x^2}\leqq y\leqq\sqrt{a^2-x^2}\right\}$ と書けるので

$$\begin{aligned}\iint_D \left(2x^2+3y^3\right)dxdy &= \int_{-a}^a\left\{\int_{-\sqrt{a^-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(2x^2+3y^3\right)dy\right\}dx\\ &= \int_{-a}^a 4x^2\sqrt{a^2-x^2}dx\\ &= \frac{a^4\pi}{2}\end{aligned}$$

(4) 領域 D は $D=\{0\leqq x\leqq\pi, 0\leqq y\leqq\pi-x\}$ の形をしているが，被積分関数に絶対値がついているので幾つかの領域に分ける必要が生じる。$D_1=D\cap\{\sin(x+y)\geqq 0\}$ とおくと $D_1=\{0\leqq x\leqq\pi, 0\leqq y\leqq\pi-x\}$ となる。$D_2=D\cap\{\sin(x+y)\leqq 0\}$ とおくと D_2 はそのままでは 1 つの式に書けないので更に 2 つに分ける。$D_{21}=\{0\leqq x\leqq\pi, \pi-x\leqq y\leqq 2\pi-x\}$，$D_{22}=$

$\{\pi \leqq x \leqq 2\pi, 0 \leqq y \leqq 2\pi - x\}$ とおくと，$D_2 = D_{21} + D_{22}$ となっている。

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{D_1} |\sin(x+y)| dxdy = \iint_{D_1} \sin(x+y) dxdy \\
&= \int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{\pi - x} \sin(x+y) dy \right\} dx \\
&= \int_0^{\pi} 1 + \cos x dx = \pi \\
I_2 &= \iint_{D_{21}} |\sin(x+y)| dxdy = \iint_{D_{21}} -\sin(x+y) dxdy \\
&= \int_0^{\pi} \left\{ \int_{\pi - x}^{2\pi - x} -\sin(x+y) dy \right\} dx \\
&= \int_0^{\pi} 2 dx = 2\pi \\
I_3 &= \iint_{D_{22}} |\sin(x+y)| dxdy = \iint_{D_{22}} -\sin(x+y) dxdy \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi - x} -\sin(x+y) dy \right\} dx \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} (\cos x - 1)\, dx = \pi
\end{aligned}
$$

より

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 4\pi$$

となる。

演習問題 5.6　次の重積分について考える。ただし $D = \{0 \leqq y \leqq x \leqq 1\}$ とする。

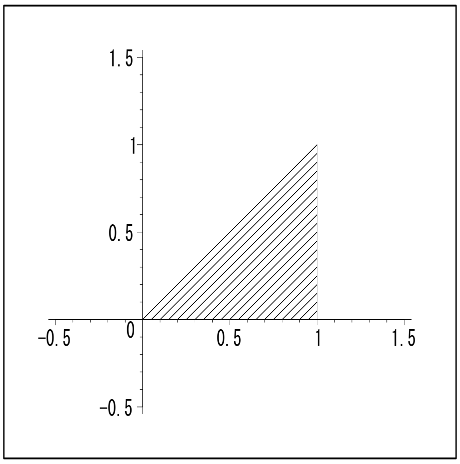
$$I = \iint_D e^{-x^2} dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) D をを横線形 ($\{\, (x,y) \mid\ c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y) \,\}$ の形のもの) の形で表せ。
(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。
(4) D を縦線形 ($\{\, (x,y) \mid\ a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \,\}$ の形のもの) の形で表せ。
(5) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表せ。
(6) I を求めよ。

(1) 次ページの図参照。
(2) $D = \{0 \leqq y \leqq 1, y \leqq x \leqq 1\}$ となる。
(3)

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D e^{-x^2} dxdy \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_y^1 e^{-x^2} dx \right\} dy
\end{aligned}
$$

となる。



(4) $D = \{0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x\}$ となる。

(5)

$$\begin{aligned} I &= \iint_D e^{-x^2} dxdy \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^x e^{-x^2} dy \right\} dx \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left\{ \int_0^x e^{-x^2} dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 x e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

となる。$t = x^2$ とおいて変数変換すると，

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

演習問題 5.7　次の積分の順序を変更せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \right\} dx$　　(2) $\displaystyle\int_a^x \left\{ \int_a^y f(t,y)dt \right\} dy$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \left\{ \int_{x-1}^{x+1} f(x,y)dy \right\} dx$

累次積分を重積分に直し，その重積分の積分領域を図示し，その重積分を最初の積分とは別の変数を先に積分する累次積分に変形する。例えば (1) でいうと，縦線型の累次積分になっている。これを重積分に直してから，横線型の累次積分に直せばよい。

(1) $D = \{0 \leqq x \leqq 1, x \leqq y \leqq \sqrt{x}\} = \left\{0 \leqq y \leqq 1, y^2 \leqq x \leqq y\right\}$ なので

$$\int_0^1 \left\{ \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \right\} dx = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{y^2}^{y} f(x,y)dx \right\} dy$$

(2) 考える平面が xy 平面ではなく ty 平面であることに注意。x は今の場合定数と考える。 $D = \{a \leqq y \leqq x, a \leqq t \leqq y\} = \{a \leqq t \leqq x, t \leqq y \leqq x\}$ なので

$$\begin{aligned}\int_a^x \left\{\int_a^y f(t,y)dt\right\} dy &= \iint_D f(t,y)dtdy \\ &= \int_a^x \left\{\int_t^x f(t,y)dy\right\} dt\end{aligned}$$

(3) $h_1(y) = \begin{cases} y-1 & (y \geqq 2) \\ 1 & (y < 2) \end{cases}$, $h_2(y) = \begin{cases} 2 & (y \geqq 1) \\ y+1 & (y < 1) \end{cases}$ とおくと
$D = \{1 \leqq x \leqq 2, x-1 \leqq y \leqq x+1\} = \{0 \leqq y \leqq 3, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)\}$ なので

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left\{\int_{x-1}^{x+1} f(x,y)dy\right\} dx &= \iint_D f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^3 \left\{\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right\} dy\end{aligned}$$

となる。実際に計算するには $y \geqq 2, 2 \geqq y \geqq 1, 1 \geqq y$ と場合分けする必要がある。

演習問題 5.8　次の積分の順序を変更する事により，累次積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^a \left\{\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\sqrt{x^2+y^2}dy\right\} dx \ (a > 0)$　(2) $\displaystyle\int_1^e \left\{\int_0^{\log x} \frac{1+y}{x}dy\right\} dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left\{\int_0^{t^2} t\cos(1-x)^2 dx\right\} dt$

一旦重積分に直して積分順序を変更する方法は前問と同じなので解説は省略します。 なれれば重積分の領域を図示しなくてもできますが，勘違いする事もあるので，必ず図示する事を推奨します。

(1) $D = \left\{0 \leqq x \leqq a, 0 \leqq y \leqq \sqrt{a^2-x^2}\right\} = \left\{0 \leqq y \leqq a, 0 \leqq x \leqq \sqrt{a^2-y^2}\right\}$ なので

$$\begin{aligned}\int_0^a \left\{\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\sqrt{x^2+y^2}dy\right\} dx &= \iint_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy \\ &= \int_0^a \left\{\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\sqrt{x^2+y^2}dx\right\} dy \\ &= \int_0^a \frac{1}{3}(a^3-y^3)dy \\ &= \frac{1}{4}a^4\end{aligned}$$

(2) $D = \{1 \leqq x \leqq e, 0 \leqq y \leqq \log x\} = \{0 \leqq y \leqq 1, e^y \leqq x \leqq e\}$ なので

$$\begin{aligned}\int_1^e \left\{\int_0^{\log x} \frac{1+y}{x}dy\right\} dx &= \iint_D \frac{1+y}{x}dxdy \\ &= \int_0^1 \left\{\int_{e^y}^e \frac{1+y}{x}dx\right\} dy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(1 - y^2\right) dy \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

(3) $D = \left\{0 \leqq t \leqq 1, 0 \leqq x \leqq t^2\right\} = \{0 \leqq x \leqq 1, \sqrt{x} \leqq t \leqq 1\}$ なので

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left\{ \int_0^{t^2} \textcolor{red}{t} \cos(1-x)^2 dx \right\} dt &= \iint_D t \cos(1-x)^2 dt dx \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_{\sqrt{x}}^1 t \cos(1-x)^2 dt \right\} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x) \cos(1-x)^2 dx \\
&= \frac{1}{4} \sin 1
\end{aligned}
$$