数理解析 II 問題解説 #8

河野

演習問題 5.12　次の積分値を求めよ。

(1) $\displaystyle\iiint_D ydxdydz \quad D=\{x^2+y^2+z^2 \leqq 1, x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0\}$

(2) $\displaystyle\iiint_D zdxdydz \quad D=\{0\leqq x\leqq y^2, z\leqq y\leqq 2z, 0\leqq z\leqq 1\}$

(3) $\displaystyle\iiint_D z^2dxdydz \quad D=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1\right\}\ (a,b,c>0)$

(4) $\displaystyle\iiint_D (x+y^2z)\,dxdydz \quad S=\left\{0\leqq z\leqq \sqrt{x^2+y^2}\leqq 1, x\geqq 0\right\}$

(1) $D=\left\{0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq \sqrt{1^2-x^2}, 0\leqq z\leqq \sqrt{1^2-x^2-y^2}\right\}$ なので

$$\begin{aligned}
\iiint_D ydxdydz &= \int_0^1\left\{\int_0^{\sqrt{1^2-x^2}}\left\{\int_0^{\sqrt{1^2-x^2-y^2}} ydz\right\}dy\right\}dx \\
&= \int_0^1\left\{\int_0^{\sqrt{1^2-x^2}} y\sqrt{1^2-x^2-y^2}dy\right\}dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 (1^2-x^2)\sqrt{1^2-x^2}dx \\
&= \frac{1^4\pi}{16}
\end{aligned}$$

$1^k=1$ ですが，そのままにしておきます。

(2)

$$\begin{aligned}
\iiint_D zdxdydz &= \int_0^1\left\{\int_z^{2z}\left\{\int_0^{y^2} zdx\right\}dy\right\}dz \\
&= \int_0^1\left\{\int_z^{2z} zy^2dy\right\}dz \\
&= \int_0^1 \frac{7z^4}{3}dz \\
&= \frac{7}{15}
\end{aligned}$$

(3) この計算は演習問題 5.13 参考の事。

$$\begin{aligned}
\iiint_D z^2dxdydz &= \int_{-a}^{a}\left\{\int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\left\{\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z^2dz\right\}dy\right\}dx \\
&= \frac{4abc^3\pi}{15}
\end{aligned}$$

(4) $D = \left\{0 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}, 0 \leqq z \leqq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$ なので

$$\begin{aligned}\iiint_D (x+y^2z)\,dxdydz &= \int_0^1 \left\{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left\{\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (x+y^2z)\,dz\right\} dy\right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2(x^2+y^2)}{2}\right) dy\right\} dx\end{aligned}$$

となり，

$$\int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} + x^3\log(\sqrt{1-x^2}+1) + \frac{(1-x^2)^{5/2}}{2} + \frac{x^2(1-x^2)^{3/2}}{3} - \frac{1}{2}x^3\log(x^2)\right) dx$$

となる。これを積分して

$$\frac{29}{48} + \frac{\pi}{24}$$

を得る。

演習問題 5.13　積分 $I = \iiint_D z^2 dxdydz$ $\left(D = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1\right\}\right.$ ここで $a, b, c > 0$ とする) を考える (演習問題 5.12 (3) の問題)。

(1) $x = au, y = bv, z = cw$ とおいて変数変換せよ。

(2) さらに極座標に変換し積分を求めよ。

変数変換の条件では結果だけを述べている。実際に成立している事のチェックは各自行う事 (後の問題も同様)。

(1) $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = abc$ なので，uvw–空間の領域 D' を $D' = \left\{u^2+v^2+w^2 \leqq 1\right\}$ とおくとこの対応で D と D' は一対一に対応し，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)} = 0$ となる点はない。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned}I &= \iiint_D z^2 dxdydz \\ &= \iiint_{D'} (cw)^2 abcdudvdw \\ &= abc^3 \iiint_{D'} w^2 dudvdw\end{aligned}$$

(2) $u = r\sin\theta\cos\varphi, v = r\sin\theta\sin\varphi, w = r\cos\theta$ とおく。$r\theta\varphi$–空間の領域 E を $E = \{0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\}$ とおく。$\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ なので，D' と E は面積 0 の部分を除いて一対一であり，面積 0 の部分を除いて $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,\theta,\varphi)} \neq 0$ である。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned}I &= abc^3 \iiint_E r^2\cos^2\theta r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi \\ &= \frac{4abc^3\pi}{15}\end{aligned}$$

演習問題 5.14 $D = \{0 < x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\}$ のとき次の広義積分

$$I = \iiint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$$

を計算せよ。

D の近似増加列として，$A_n = \left\{ \frac{1}{n^2} \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1 \right\}$ をとる。$x = r \sin\theta \cos\varphi, y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ とおくと $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin\theta$ である。$E_n = \left\{ \frac{1}{n} \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \right\}$ とおくと A_n と E_n は面積 0 の部分を除いて一対一に対応しており，ヤコビアンが 0 になる領域は面積 0 である。よって変数変換の条件を満たしているので，

$$\begin{aligned}
I_n &= \iiint_{A_n} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz \\
&= \iiint_{E_n} \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi = \iiint_{E_n} \sin\theta drd\theta d\varphi \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left\{ \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \sin\theta d\varphi \right\} d\theta \right\} dr \\
&= 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 \left\{ \int_0^\pi \sin\theta d\theta \right\} dr \\
&= 4\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 dr = 4\pi \left(1 - \frac{1}{n} \right)
\end{aligned}$$

よって

$$I = \lim_{n \to \infty} I_n = 4\pi$$

演習問題 5.15 半径 r の球の体積を求めよ。$D = \{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq r^2 \}$ とし，$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, $g(x, y) = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ と考えよ。

$x = s\cos\theta, y = s\sin\theta$ とおくと s の部分は r と置きたいのだが，すでに r が定数として使われているので s と置いた。$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, \theta)} = s$ である。$E = \{0 \leqq s \leqq r, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ とおくと D と E は面積 0 の部分を除いて一対一に対応し，ヤコビアンが 0 になる領域の面積も 0 である。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D \left(\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} - \left(-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right) \right) dxdy \\
&= 2 \iint_E \sqrt{r^2 - s^2} sdsd\theta \\
&= 2 \int_0^r \left\{ \int_0^{2\pi} s\sqrt{r^2 - s^2} d\theta \right\} ds \\
&= 4\pi \int_0^r s\sqrt{r^2 - s^2} ds = \frac{4\pi r^3}{3}
\end{aligned}$$

演習問題 5.16　$\left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, 0 \leqq y \leqq f(x) \right\}$ を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を上の方法で求めよ。

$C = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, 0 \leqq y \leqq f(x) \right\}$ が xyz–空間の中の xy–平面に入っていると考え，x–軸の回りに C を回転させてできる領域を D とする。$D = \left\{ a \leqq x \leqq b, \sqrt{y^2+z^2} \leqq f(x) \right\}$ と表される。D の体積を $\mathrm{Vol}(D)$ とすると，

$$\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D dxdydz$$

である。$x = x, y = r\cos\theta, z = r\sin\theta$ と置くと，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,r,\theta)} = r$ である。

$$E = \left\{ (x,r,\theta) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, 0 \leqq r \leqq f(x), 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \right\}$$

とおくと，この対応で体積 0 の領域を除いて一対一であり，体積 0 の領域を除いてヤコビアンは 0 ではない。よって変数変換の条件を満たしているので，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) &= \iiint_D dxdydz \\
&= \iiint_E r dxdrd\theta \\
&= \int_a^b \left\{ \int_0^{f(x)} \left\{ \int_0^{2\pi} r d\theta \right\} dr \right\} dx \\
&= \int_a^b \left\{ \int_0^{f(x)} 2\pi r dr \right\} dx \\
&= \pi \int_a^b \left\{ \left[r^2 \right]_{r=0}^{f(x)} \right\} dx \\
&= \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx
\end{aligned}$$

演習問題 5.17　一様な密度をもつ半球体 $D = \left\{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \leqq r^2, x \geqq 0 \right\}$ の重心の位置を求めよ。

$x = s\sin\theta\cos\varphi, y = s\sin\theta\sin\varphi, z = s\cos\theta$ とおく。$E = \left\{ 0 \leqq s \leqq r, 0 \leqq \theta \leqq \pi, -\dfrac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2} \right\}$ に対し，この対応で面積 0 の領域を除いて D と一対一に対応しており，ヤコビアンが 0 の面積も 0 である。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned}
K &= \iiint_D dxdydz \\
&= \iiint_E s^2 \sin\theta dsd\theta d\varphi \\
&= \frac{2\pi r^3}{3}
\end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned}
\iiint_D x dxdydz &= \iiint_E x dsd\theta d\varphi \\
&= \int_0^r \left\{ \int_0^{\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} s\sin\theta\cos\varphi s^2 \sin\theta d\varphi \right\} d\theta \right\} ds \\
&= \int_0^r s^3 ds \int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \\
&= \frac{r^4}{4}\frac{\pi}{2}2 = \frac{\pi r^4}{4}
\end{aligned}$$

同様に計算して $\iiint_D y dxdydz = 0, \iiint_D z dxdydz = 0$ が分かる。よって重心は

$$\left(\frac{3}{8}r, 0, 0\right)$$

である。