

## 0 Introduction 及び論理の練習

テキストからさらに突っ込んだ事を知りたい人には参考書として次をあげておく。

高木貞治『解析概論』(岩波書店)

小平邦彦『解析入門』(岩波書店)

### 0.1 数学的イントロ

微積分は自然科学などを通して、大きな役割を果たしてきたし、現在も果している。この講義では、前後期にわたってその微積分学を学習して行く。

微積分は高校でも学んだはずだが(数学 III を学んでいないものは多項式の微積分まで)、どこが違うのだろう。高校との違い(これについては、強調するかしないかの 2 つのやりかたがある)は 1 つは、量的側面。取り扱う範囲がひろがるという事がある。高校数学で扱っていないものとして、逆三角関数、Taylor の定理、多変数関数等があるが、特に**多変数関数**を扱うというのが大きな違いだろう。2 つ目は質的側面(理論構成の厳密さ… 極限概念と実数概念)。後者については少し説明が必要だと思われる。微積分の歴史にもふれながら、それを説明して全体の講義のイントロにしたい。

微積分学は 17 世紀の後半にニュートン(1642-1727)とライプニツ(1646-1716)によって独立に始められた。先主権争いなどもあったが今では独立に(お互に相手の仕事を知らないで)考えたとされている。源流は 2 つあり、1 つは古代ギリシア以来の『求積法』(面積・体積などを求める方法)、もう 1 つは近代になって考えられ始めた『接線法』と呼ばれたものである。いずれも、所謂「無限概念」に関係するもので、その当時から、色々な批判があった。それは、その当時の人が数学(数学だけでなく諸科学・諸文化)の理想と考えた古代ギリシアの厳密な取り扱いに比べて、曖昧(或る人にとっては「いいかげん」)に感じられたのであろう。ここでは極限概念に対するパークレイの批判を紹介する。

$y = f(x) = x^2$  の導関数を求めてみよう。(物理の場合の問題だと、 $x$  秒後の物体の位置が  $x^2$  で表わされる時、 $x$  秒後の速度は?) 導関数の定義に従って計算すると次の様になる。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

---

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

よって  $y = f(x) = x^2$  の導関数は  $y = f'(x) = 2x$  となる。

これに対するバークレイの批判は以下の様である：数 (実数) は 0 であるかないかのいずれかである。だから  $h$  も 0 であるかないかのいずれかである。最初に  $h \neq 0$  としよう。この時最後の等式は成立しない。次に  $h = 0$  としよう。この時は途中で 0 で割算をしている。いずれにせよ矛盾を含む議論をしている。

これに対しニュートンを初めとして、確かに色々な説明をしている。しかし、本質的には答える事が出来なかった。それは極限概念が直観に依存する形で展開され、数学的に厳密とは言い難かった事に原因を求める事ができるかもしれない。しかし、微積分学は、惑星の運動法則の解明をはじめとして、多くの事に解答を与えた。微積分学は基礎は曖昧であったが捨て去るには強力で魅力的だった。ダランベールの「前進しよう。信念は後から湧いてくる。」という言葉がその様子を表わしている。

17,18 世紀を通じて微積分学そしてニュートン力学は大きな成功をおさめる。例えば、惑星の存在の予想など。「微分方程式を用いて運動の将来を厳密に予測できる。」という立場は例えば、ラプラスによる『ラプラスの魔』の考えを生み出したり、哲学に持込まれ、機械論的決定論を生み出す。

19 世紀の 20-30 年代にコーシー (1789-1857) により『解析教程』のなかで、極限の数学的にも厳密な定義が提出される。現在  $\varepsilon$ - $\delta$  論法と呼ばれている。大学の授業の中でも微積分学が上げられてくると同じ時期という事は注意する必要がある。「その時代」の一つの解決、理論的定式化という事が出来る。

微積分学の理論構築のためには、もう 1 つ問題がのこっていた。それは「実数とは何か」という問題である。そんなのは分っているというかもしれないが、高校まででは「これこれのものが実数である」というきちんとした定義はやっていない (無限小数も理論的にはキッチリはやってない)。例として、次の問題を考えてみる。

**【問題】**  $\sqrt{2}$  は存在するか。すなわち  $x^2 = 2, x > 0$  となる実数は存在するか。

最初に平方根を学んだ時、「 $x^2 = 2, x > 0$  となる数を  $\sqrt{2}$  と呼ぶ。」としたはず。しかし、そのような数が、実数のなかに存在しなければ、定義は意味がない。例えば、 $x^2 = -1$  となる実数は存在しない。だから「 $x^2 = -1$  となる実数を  $i$  と呼ぶ。」と定義しても意味はない。「定義」した事で存在するつもりになってはいけない。定義する前に存在を確かめなくてはならない。

「微積分学の基本定理」とよばれている定理が在るが (後期にやる)、それを示すには「平均値の定理」を必要とする。これを示すには「ロルの定理」、そのためには「最大値定理」と遡って行く事ができるが、最後 (最初のというべきか) の最大値定理をうまく証明できない。明確な証明のためには「実数とは何か」の解明が必要という事が自覚されてくる。

そうした中、この問題 (実数論) は 19 世紀後半に何人かの人によって独立に展開された。カントール (1845-1918)、デデキント (1831-1916)、ワイエルシュトラス (1815-1897) などがその人達である。

微積分は基礎の厳密さが確定する前に理論自身が発展するという形をとった。その原因として、「無限概念」に関係した数学理論だという点があげられる。